基础集合论

北京师范大学出版社



ISBN 7-303-00263-4/O·58

定 价： 1.70 元

高等学校教学用书

基础集合论

董延闿

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

基础集合论

戴延闿

*

北京师范大学出版社出版发行

全国新华书店经销

中国科学院印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：7.625 字数：158 千

1988 年 11 月第 1 版 1988 年 11 月第 1 次印刷

印数：1—3 000

ISBN 7-303-00263-4/O·58

定价：1.70 元

前　言

自从 G. Cantor 在上一世纪后期创立集合论以来，集合论已经成为现代数学几乎所有分支的理论基础。然而，目前在国内向读者系统介绍集合论最基本的理论并进行集合论推理的基本训练，为读者进一步学习数学打好根基的集合论教材尚不多见。有鉴于此，作者不揣谫陋，编写了这本教材。限于作者的水平，书中错误与不当之处在所不免。作者殷切希望得到读者和专家们的批评和指正。

本书是按照公理化的精神编写的。作者没有从一开始就罗列本书需要的全部公理，而是按照材料发展的需要逐步列出它们。这样可使读者更清楚地看出哪些结论只用哪些公理就足以证明。不过，本书不是一本"公理集合论"，它既不涉及现代集合论中深入的课题，也不过多地追求形式化。为了使读者易于理解，本书的推证部分写得比较详细，并且对于较难懂的证明按照作者的体会描述了这些证明的概括和直觉想法。作者希望做到，在大学数学专业学过两年的读者经过努力一般应能不很困难地自学本书。

每章后面编有习题。习题的顺序与正文相应部分的顺序基本一致，读者可以配合正文去作习题。习题是本书的有机组成部分，数量并不太多，希望读者至少完成其中的大部分。

本书承认逻辑法则，不另作系统论述，对于希望了解逻辑知识的读者，建议参阅王宪钧著《数理逻辑引论》(北京大学出版社)。

本书的初稿曾于1985年和1986年在北京师范大学数学系试用两遍. 在编写初稿以前，徐长胜同志向作者提出了一些有益的具体建议. 在完成初稿以后，王世强教授对之进行了认真仔细的审阅，并指出了其中的若干错误. 作者谨对他们表示深深的谢意.

董延闿

于北京师范大学数学系

1986年7月

内 容 簡 介

本书向读者系统地介绍集合论最基本的理论，为学习数学各分支打下理论的根基。它是按照公理化的精神编写的，但不过多地追求形式化。为了使读者易于理解，推证部分写得比较详细，并且，对于较难懂的证明，还描述了证明的直觉想法。

本书可用作高等院校数学专业同名选课的教材，也可用作大学生，中学教师及需要集合论知识的科技工作者的自学读物（全书或前四章）。

目　　录

第一章 集合与集合的运算

§1 引 言

集合论成为一门学科，是上一世纪后期的事情. G. Cantor 在 1874-1897 发表的一系列论文奠定了集合论的基础. 从那以后，集合论的概念和结果被广泛应用于数学的各个分支，使数学科学的面貌受到了深刻的影响. 在今天，可以说集合论已成为几乎所有数学分支的基础了.

Cantor 集合论的出现在当时数学界引起极大的反应. 它受到一部分数学家，如 R. Dedekind, B. Russell, D. Hilbert 等等的支持和高度赞美，也受到一部分数学家，特别是 L. Kronecker 的激烈反对①. 同时，从上一世纪末开始，形形色色的有关集合论的悖论不断出现②，当时的集合论对这些悖论不能做出满意的回答.

在集合论的初创时期，Cantor 是以所谓"朴素的"观点来看待集合的. 他广泛地谈论集合，但他没有明确规定对于已知集合做哪些事情是合法的，就是说，对已知集合做哪些事情可以得出受到承认的集合. 尽管 Cantor 本人实际已经建立起相当广泛而深刻的集合理论，但他在理论基础上的某些

① 参看 M. 克莱因:《古今数学思想》(北京大学数学系数学史翻译组译)，第 41，51 章.

② 参看本章，§3.

不明确性使得他和他的支持者们不能有力地保卫他的理论，也不能把所有已经提出的悖论排除于集合论的大门之外．

为了填补 Cantor 在理论基础上的不足，从而维护 Cantor 的理论，在 1908，E. Zermelo 首先为集合论设立了一套比较完整的公理，这些公理主要是明确了对已知集合做哪些事是合法的． 以后经过 A. Fraenkel 等人的补充和完善，形成了现在所谓的（ZF）公理系统．较晚一些，还有所谓的（GB）公理系统，是由 von Neumann, P. Bernays, K. Gödel 等人建立的．在这样的公理系统中，悖论被排除了，责难的声音也就减弱了．在本世纪，在公理化的集合论中，关于选择公理①和连续统假设②的研究大大推动了集合论的发展，使之成为至今活跃的数学学科之一．

本书是为学习其他学科服务的集合论教材，不包含集合论的专门课题．不过，按照当代的要求，本书将按照公理化的精神向读者介绍集合论的基本内容，所遵循的公理系统就是上述的（ZF）系统．另一方面，为了便于初学者理解，本书将不追求叙述的高度形式化．最后，我们声明，本书将承认数学中通用的逻辑法则．除在个别场合以底注形式列出一些逻辑法则外，我们将不对逻辑法则进行系统的考察．

§2 集　合

什么是集合？ 集合论的创始人 G. Cantor 曾作如下描

① 参看第四章，§ 4.

② 参看第六章，§ 12.

述：

“一个集合是我们直觉中或理智中的，确定的，互不相同的事物的一个汇集，被设想为一个整体(单体)”.

这些事物叫做这集合的元素，或说这些元素属于这集合，也说这集合包含这些元素.

Cantor 的描述对于人们直观地理解集合概念是很有价值的. 例如，它说一个集合的元素是“确定的”，这意味着某个事物是否属于某个集合是没有丝毫含混余地的；又如，它说一个集合的元素是“互不相同的”，这意味着在一个集合中相同的元素只能算是一个；又如，它说把一个集合“设想为一个整体(单体)”，这意味着要把整个集合看成一个单独的思维对象，而不再看成那些个别元素的简单积累.

读者可以在这样的理解下举出很多集合的例子，如在某一时刻在某一教室的学生的集合，平面上与某一三角形相似的一切三角形的集合等等. 但应看到，Cantor 的叙述不能当作集合概念的定义，因为，在这叙述中所谓“汇集”，“整体”，并不比“集合”简单，不过是它的同义语罢了.

在本书中，我们把“集合”和“属于”当作不定义的原始概念. 用 $a\in A$ 记句子“a 属于集合 A”，用 $a\notin A$ 记句子“a 不属于集合 A”. 在 $a\in A$ 的情况下，说 a 是集合 A 的元素，或说集合 A 包含 a.

现在有个问题需要说明：集合的元素是什么？我们的答复是，集合的元素还是集合. 这就是说，当我们写下 $a\in A$ 时，其中的 a 和 A 都被认为是集合. 对读者来说，一个集合以另外一些集合为元素的情况是不生疏的. 例如，与一已知直线平行的一切直线组成一个集合，这集合的元素是直线，而直

线又可看成点的集合．读者可能感到不解的是，除了以集合为元素的集合外，为什么不考虑以其他事物为元素的集合？我们的答复是：1）我们讲的是抽象的集合论．抽象集合论研究的只是集合和集合与集合之间的关系，不考虑集合以外的对象．2）集合本来是不定义的概念，因而不能阻止我们把它们的元素仍看作是集合．这样做并不防碍把集合论的结果应用于其他分支（在允许应用的情况下）．

如上所述，“属于”关系（记为$\in$）是集合论中一个基本关系．此外，我们把“等于”关系（记作$=$）看作是前于集合论而在集合论中延袭下来的一个基本关系①．集合A等于集合B（记作$A=B$）指的是A和B是同一集合，集合A不等于集合B（记作$A\neq B$）指的是A和B不是同一集合．在$A=B$的情况下，可以理解为字母A和B是同一集合的不同记号，它们可以互相代替．例如，如$a\in A$且$a=b$，则$b\in A$．

以下是关于“等于”和“属于”这两个基本关系的公理：

外延公理

对于集合A, B，如果对于任何的x：$x\in A$当且仅当$x\in B$，则$A=B$．

这就是说，如果两个集合有完全一样的元素，则它们是同一集合．

【注1】　按照上面对于$A=B$的理解，外延公理的逆命题显然成立，即，如$A=B$，则对于任何的x：$x\in A$当且仅

① 有的作者利用“$\in$”定义“$=$”，并改动下面的外延公理．参看，例如G. Takeuti, W. M. Zaring合著的《Introduction to Axiomatic Set Theory》, Ch. 3.

当 $x\in B$.

此外，读者可能认为外延公理本身也是按逻辑显然成立，不必列为公理．难道元素完全一样的两个集合不是同一集合吗？ 问题不是这样简单． 公理涉及到"="和"$\in$"两个概念（"元素"概念是用"$\in$"概念解释的）． 如上所述，"="概念算是明确了，但"$\in$"概念是不定义的．在日常用语中，"属于"概念并不明确．例如，用 x 记教室，用 A 记学生，从权利上看，不妨把学生 A 在教室 x 上课说成是 x 属于 A．如果两个学生 A 和 B 总在同样的教室上课（不论教室变到哪里），那么，对于任何的教室 x，x 总是同时属于 A 和 B 的．但 A 和 B 却不见得是同一个学生．可见这样意义的"属于"就不符合外延公理．外延公理实际是规定了集合论中"$\in$"的用法．

【注 2】 从外延公理和注 1 不难推出，集合 $A\neq B$ 的必要且充分条件：存在某个 x，$x\in A$ 但 $x\notin B$，或者存在某个 y，$y\in B$ 但 $y\notin A$.

以下是我们的另一个公理：

空集公理

存在一个不包含任何元素的集合，这就是说，存在一个集合 A，使得对于任何的 x，$x\notin A$.

空集公理含有以下两层意思：（1）我们承认了存在至少一个集合（当然不排斥存在其他集合），这样，我们的集合论就不是无的放矢了．（2）我们承认了不含任何元素的"汇集"是一个集合，排除通常认为集合必须包含元素的想法．

【空集公理的注】 空集公理中的集合 A 是唯一的．

这是因为，如果 A 和 B 都是这样的集合，即对于任何的

x，同时有 $x\in A$ 和 $x\in B$，这等于说对于任何的 x，同时有 $x\in A$ 和 $x\in B$。按外延公理，$A=B$。 ∎

【定义】 不含任何元素的集合叫空集，记以 $\varnothing$。

§3　集合论的公式和条件

现在，暂时回到直观的或经验的观点来议论集合． 我们认为一个集合是由一些确定的事物组成的一个集体（参看上节 Cantor 关于集合的描述）．这就是说，任何一个事物属不属于这个集合应是完全能够判断的．例如说，某教室内一切身高超过 1.80 米的学生组成的集合．这个集合完全确定（当然，可能是空集）．但如说，“某教室内一切高个子（假定不给标准）学生”，这就不能形成集合．在第一个例子里，关于集合的元素的条件是明确的，而在第二个例子里条件却不明确．

在人们的经验里，往往认为用一句合乎语法的语言来表达某一集合的元素的“条件”是否明确，是容易判断的． 但请看以下的悖论：

Berry 悖论 (1906, G. Berry)①

在一切自然数中，考虑

“能用少于二十四个汉字表示的自然数”。

例如，

一千九百八十五(七个汉字)

三百九十七与五的积(九个汉字)

公元一千九百八十六年零时全世界的人口

① 当然，我们已把这悖论汉文化了．

数(十九个汉字)

它们所表示的自然数都符合"条件". 现在看这里给出的"条件"是否明确?我们知道,汉字不超过六万个,于是用少于二十四个汉字形成的字组不会超过 $60000+60000^2+\cdots+60000^{23}$ 个. 可见能用少于二十四个汉字表示的自然数只有有限多个. 但自然数是无穷尽的,故必存在自然数,不能用少于二十四个汉字表示. 设 n_0 是其中的最小数. 于是 n_0 可说成是:

"不能用少于二十四个汉字表示的自然数中最小的一个".

从纯形式上看,自然数 n_0 只用二十三个汉字就表示出来了,所以 n_0 符合"条件". 但从语义上看,n_0 是"不能用少于二十四个汉字表示的自然数",所以 n_0 不符合"条件"! 由此可见,这里给出的貌似明确的"条件"归根到底是不明确的.

以上悖论说明,用通常语言表达的"条件"是否明确并非永远容易判断的. 应该对怎样才算"明确"给出标准. 但是,这样的标准对通常语言来说是难以给出的(这个难题留给语言学家). 好在我们谈论的是数学,特别谈论的是集合论. 集合论只考虑集合和集合与集合之间的关系. 这样,我们可以把"条件"限制在一个明确的范围内.

先介绍"集合论的公式"这一概念. 在上节我们已经说过,"="和"$\in$"是集合论中两个基本关系. 另外,集合论中还有七个逻辑联系,分别用以下七个符号来记(每个符号后面写的是它的原义):

$\neg$——非

$\vee$——或(非此即彼,包括亦此亦彼)

$\wedge$——且

$\Rightarrow$——蕴涵

$\Leftrightarrow$——当且仅当

$\forall(\quad)$——对于任何(每个,一切)的(　),都有

$\exists(\quad)$——存在某个(　),使得

现在规定:

1) $(a=b)$和$(a\in b)$(其中a, b可用任何字母代替)是公式,被称为原子公式.

2) 如φ, ψ是公式,则$(\neg\varphi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\Rightarrow\psi)$和$(\varphi\Leftrightarrow\psi)$是公式.

3) 用$\varphi(x)$记含x的一个公式(还可含其他字母),则$(\forall x\varphi(x))$(对于任何的x, $\varphi(x)$成立)和$(\exists x\varphi(x))$(存在某个x,使得$\varphi(x)$成立)是公式.

4) 除1),2),3)所列者外,都不算公式.

在不致引起混淆的情况下,可以略去公式中的一些括号.

例如,$x\in A$, $x\in B$和$A=B$都是原子公式,$x\in A\Leftrightarrow x\in B$和$\forall x(x\in A\Leftrightarrow x\in B)$都是公式,最后,

$$\forall A\forall B(\forall x(x\in A\Leftrightarrow x\in B)\Rightarrow A=B)$$

还是公式,它就是外延公理的公式表达式.

又如,$x\in A$是原子公式,$\neg(x\in A)$是公式,

$$\forall x(\neg(x\in A))$$

也是公式,最后,

$$\exists A\forall x(\neg(x\in A))$$

还是公式,它就是空集公理的公式表达式.

在本书中,按严格意义说,当我们说到"公式"时,就指如上所述的集合论公式,这些公式都是从原子公式出发,按照上述1),2),3)的规定,运用限定的逻辑符号形成的. 以后,为

了简化书写，也允许用另外的符号(例如用 $a \notin b$ 代替 $\neg(a \in b)$，用 $a \neq b$ 代替 $\neg(a = b)$ 等等) 或用通常的语言来表达公式，但要求这样的表达语是最终能够写成集合论的公式的.

我们已经明确什么是集合论的公式了，现在定义"集合论的条件"：

当且仅当 $C(x)$ 是含 x 的一个公式(还可含其他字母)并且不含 $\forall x$ 及 $\exists x$，我们说 $C(x)$ 是 x 的一个集合论条件，简称条件.

例如，$x \neq x$ 是 x 的一个条件. 当然这样的 x 不存在，即 $\forall x(\neg(x \neq x))$. 另一方面，我们有 $\forall x(\neg(x \in \varnothing))$. 因此，对于任何的 x，$(x \neq x)$ 与 $(x \in \varnothing)$ 同时不成立，这等于说它们同时成立，于是，

$$\forall x(x \in \varnothing \Longleftrightarrow x \neq x).$$

可以说，$x \neq x$ 是使 x 成为空集 $\varnothing$ 的元素的一个条件. 一般来说：

对于一个已知条件 $C(x)$，如果存在一个集合 A，恰好包含使 $C(x)$ 成立的一切 x，即

$$\exists A \forall x(x \in A \Longleftrightarrow C(x)),$$

就说 $C(x)$ 是使 x 成为集合 A 的元素的一个条件，并记

$$A = \{x \mid C(x)\}.$$

这里规定，字母 A 不得出现在 $C(x)$ 中.

例如可写

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}.$$

现在，我们终于明确了什么是集合论的条件，它们被限制在前述规定的范围内. 我们不考虑这个范围之外的"条件". 例如，Berry 悖论中的"条件"，除非证明它能够表示为集合论

的条件，我们就不考虑它。(你能用集合论的条件确切地表示“用…汉字表示的…”吗？)

另外，我们还明确了 $C(x)$ 是使 x 成为集合 A 的元素的条件的意义，即 $\forall x(x \in A \Longleftrightarrow C(x))$。必须注意，这是在集合 A 存在的情况下说话的。例如，只是空集公理保证空集 $\varnothing$ 的存在以后，我们才说 $x \neq x$ 是使 x 成为 $\varnothing$ 的元素的条件。现在的问题是：任何一个集合论的条件 $C(x)$ 都能确定一个集合吗？下面的悖论给出否定的答复：

Russell 悖论 (1902, B. Russell)

看集合论的条件 $x \notin x$，并假定满足这条件的一切 x 组成一个集合，即假定存在集合 A，使

$$\forall x(x \in A \Longleftrightarrow x \notin x) \tag{1}$$

我们看 $A \in A$ 还是 $A \notin A$？如 $A \in A$，即在(1)的左边以 A 代 x，于是由(1)推出 $A \notin A$。如 $A \notin A$，即在(1)的右边以 A 代 x，于是由(1)推出 $A \in A$。可见如满足条件 $x \notin x$ 的一切 x 组成一个集合 A，那么，在任何情况下，都将导致 $A \in A$ 与 $A \notin A$ 同时成立的矛盾。

Russell 悖论告诉我们，即使条件 $C(x)$ 是明确的集合论条件，满足它的一切 x 也不一定形成一个集合。下面对这悖论做些非正式的解释：一个集合 x 不是自己的元素应该是一条普遍的原则①。这样，条件 $x \notin x$ 太广泛了，满足这条件的 x 太漫无边际了，以致如认为它们形成集合，就会导致逻辑上的矛盾。这部分地说明了我们考虑的集合不能是过于庞大的汇合物。

① 当然，我们现在没有设立公理，保证这原则普遍成立。参看习题六，13.

§4 子　　集

【定义】 集合A叫做集合B的子集,记为$A\subset B$,当且仅当A的元素都是B的元素,即当且仅当

$$\forall x(x\in A\Rightarrow x\in B).$$

此时说A包容于 B,也说B包容 A①,并说B是A的包容集.

当且仅当A是B的子集又不与B重合,即当且仅当 $A\subset B\wedge A\neq B$时,说A是B的真子集,记为 $A\subsetneqq B$.

【注】 包容关系$\subset$具有以下的性质: 对于集合 A, B, C:

1)(自反性)$A\subset A$.

2)(反对称性)$A\subset B\wedge B\subset A\Rightarrow A=B$.

3)(传递性)$A\subset B\wedge B\subset C\Rightarrow A\subset C$.

性质1),3)可直接由子集定义推出;性质2)是子集定义与外延公理结合的结果. 性质1)说的是一个集合总是自己的子集(非真子集). 性质2)说的是如两集合互为子集,则它们重合.

【定理 1】 空集是每个集合的子集,即,对于任何的集合A, $\varnothing\subset A$.

证 只要证明 $\forall x(x\in\varnothing\Rightarrow x\in A)$ 就可以了. 事实上,对于任何的 x, $x\in\varnothing$总是错的. 所以对于任何的 x,

$$x\in\varnothing\Rightarrow x\in A$$

① 在中文数学书籍中,往往把$A\subset B$说成"B包含A",这就同$A\in B$混淆了. 在本书中,"包含"和"包容"二词被谨慎地区分着.

就是对的①. ▮

现在回到上节末尾的议论. 我们知道, 满足一个已知条件 $C(x)$ 的一切 x 不一定形成一个集合. 象 Russell 悖论中的"汇合物" $\{x \mid x \notin x\}$ 就是过于庞大,以致不能当作一个集合来考虑. 但是,可以设想,既然集合论的条件是明确的, 那么,如果我们不是漫无边际地考虑满足条件 $C(x)$ 的一切 x, 而是在一已知集合 A 的内部考虑满足 $C(x)$ 的一切 x, 这些 x 总该形成一个集合了吧. 这就是以下的公理.

> **子集公理**
> 对于每个条件 $C(x)$, 及任何集合 B, 存在一个集合 A(字母 A 不出现在 $C(x)$ 中), 恰好包含 B 中一切满足 $C(x)$ 的元素 x, 即,
> $$\forall B \exists A \forall x(x \in A \Longleftrightarrow x \in B \wedge C(x))^{②}.$$

这里,按照上节的规定,可写

$$A = \{x \mid x \in B \wedge C(x)\}.$$

为了强调 A 是 B 的子集,我们写

$$A = \{x \in B \mid C(x)\}.$$

【子集公理的注】 子集公理中的集合 A 是唯一的.

事实上,如 A' 也符合公理的要求,即

$$\forall x(x \in A' \Longleftrightarrow x \in B \wedge C(x)),$$

---

① 用 p 和 q 记两个能够判断对或错的命题. 按逻辑法则:
 i) 如 q 是对的,则不论 p 是怎样的命题,命题 $p \Rightarrow q$ 总是对的.
 ii) 如 p 是错的,则不论 q 是怎样的命题,命题 $p \Rightarrow q$ 总是对的.

② 按严格意义,子集公理不是一条公理. 对于每个条件 $C(x)$,有一条"子集公理 c. "这里列出的是无数多条公理的一个概括. 子集公理又称析出(aussonderung)公理.

则

$$\forall x(x\in A\Longleftrightarrow x\in A').$$

按外延公理，我们得到

$$A=A'.$$ ∎

由子集公理可以推出一个很有意义的结果：

【定理 2】 不存在“万有集”，即不存在包含一切集合的集合.

证 只要证明，对于任何集合 B. 总存在一个集合，不是 B 的元素就可以了. 按子集公理，

$$C=\{x\in B\mid x\notin x\}$$

是一个集合，就是说，存在一个集合 C，使得

$$\forall x(x\in C\Longleftrightarrow x\in B\wedge x\notin x).\tag{1}$$

以下证明 $C\notin B$. 假如不然，即 $C\in B$. 现在看 $C\in C$ 还是 $C\notin C$? 如 $C\in C$，即在(1)的左边以 C 代 x，于是由(1)推出 $C\notin C$. 如 $C\notin C$，则因已假定 $C\in B$，故在(1)的右边以 C 代 x 成立，于是由(1)推出 $C\in C$. 由此可见 $C\in B$ 永远导致矛盾. 故 $C\notin B$. ∎

从定理的证明可以看出，定理 2 实际是 Russell 悖论的变种. 在集合论尚处于“朴素的”阶段时，由于集合概念没有明确的公理限制，人们很难拒绝 Russell 悖论中所说的 A 是一个集合，从而形成了一个悖论. 但是，在集合论公理化以后，按照 Russell 悖论的精神，从子集公理出发，就能推出一个合乎逻辑的结果：对于我们考虑的集合概念来说，不存在包含一切集合的“万有集”.

【推论】 不存在集合，包含一切满足条件 $x=x$ 的集合 x.

事实上，$x=x$ 对于任何集合 x 都成立．说一个集合包含一切满足 $x=x$ 的集合 x，等于说这集合包含一切集合．▌

把这结果同空集概念比较一下是有益的．条件 $x=x$ 对于任何 x 都成立，但以一切这样的 x 为元素的集合不存在．另一方面，使条件 $x\neq x$ 的 x 不存在，但 $\varnothing=\{x|x\neq x\}$ 却是我们已经承认存在的空集！读者切勿把满足某条件的集合不存在同某集合（空集）的元素不存在混为一谈．

§5　偶　　集

现在看以下问题：给定集合 a，是否存在集合，恰好以 a 为元素？就是说，是否存在集合 A，使

$$\forall x(x\in A\Longleftrightarrow x=a)?$$

类似的问题：给定集合 a,b，是否存在集合，恰好以 a 和 b 为元素？就是说，是否存在集 A，使

$$\forall x(x\in A\Longleftrightarrow x=a\vee x=b)?$$

前面设立的公理都不能保证这样集合的存在．需要设立新的公理．为了简便，我们只设立一条公理，保证以上两种集合中的后一种集合存在，并把前一种集合当作特殊情况．

偶集公理

给定集合 a，b，则存在一个集合 A，恰好以 a，b 为元素，即

$$\forall a\forall b\exists A\forall x(x\in A\Longleftrightarrow x=a\vee x=b).$$

【偶集公理的注】　偶集公理中的集合 A 是唯一的．

证明与子集公理的注的证明类似．

【定义】 对于集合 a，b，记

$$\{a, b\} = \{x \mid x = a \vee x = b\},$$

并称之为以 a，b 为元素的偶集.

【注】 $\{a, b\} = \{b, a\}$.

这是因为，

$$x = a \vee x = b \Longleftrightarrow x = b \vee x = a①.$$ ▌

在这意义下，偶集又被称为无序偶.

在偶集定义中，并未限定 $a \neq b$. 以下是 $a = b$ 的情况：

【定义】 记 $\{a\} = \{a, a\}$，并称之为以 a 为元素的单集.

显然，单集定义还可写成

$$\{a\} = \{x \mid x = a\}.$$

这就是说，单集 $\{a\}$ 是以 a 为唯一元素的集合.

在本节以前，对于具体的集合，我们只承认了空集 $\varnothing$ 的存在. 在设立偶集公理以后，我们可以无休止地构造另外的具体集合了. 例如，可以构造单集

$\{\varnothing\}$，$\{\{\varnothing\}\}$，$\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$，等等；

可以构造偶集

$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$，$\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$等等.

这些都是受到承认的集合.

最后，应提醒读者注意区分集合 a 与单集 $\{a\}$：它们之间的关系是前者是后者的唯一元素. 例如，$\varnothing$ 是不含元素的空集，而 $\{\varnothing\}$ 是以 $\varnothing$ 为唯一元素的集合. $\{\{\varnothing\}\}$ 是以 $\{\varnothing\}$ 为唯一元素的集合. 做个通俗的比喻：如把 a 看作一个田径运动员，那么，$\{a\}$ 就可以看作以 a 为唯一队员的田径队. 在运

---

① 对于命题 p，q，我们有：i) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$. ii) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$.

动会上，个人成绩和团体成绩要分别计算的.

§6 并　　集

设给定集组① M. 把M包含的一切集合合并起来，就是说，把这些集合的元素统统汇集起来，其结果能否形成集合？以下公理做出肯定的允诺.

并集公理

对于一个集组 M，存在一个集合 A，恰好包含属于M中至少一个集合的一切元素，即

$$\forall M \exists A \forall x(x \in A \Longleftrightarrow \exists X(X \in M \wedge x \in X)).$$

【并集公理的注】 由外延公理可知，并集公理中的集合A是唯一的.

为了简化书写，可把公理中关于x的条件 $\exists X(X \in M \wedge x \in X)$ 写成"$\exists X \in M(x \in X)$"，或夹杂文字来表示成"$x \in$ 某个 $X \in M$".

【定义】 对于一个集组 M，记

$$\bigcup(M) = \{x \mid x \in \text{ 某个 } X \in M\},$$

并称之为集组M的成员②的并集.

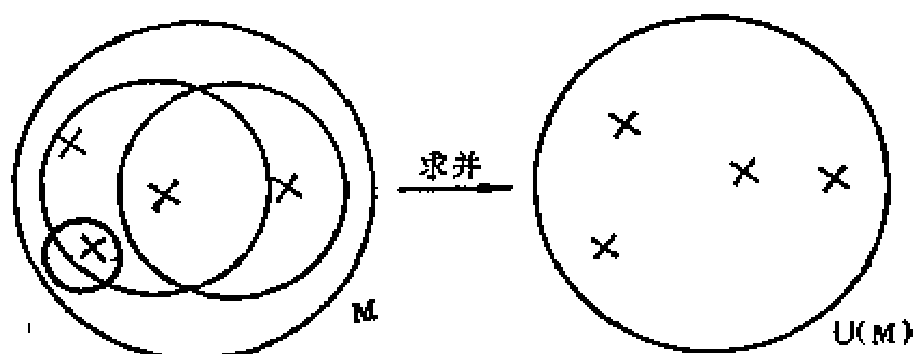
对集组M进行的动作$\bigcup(\quad)$叫做对M求并.

---

① 我们说"集组"，指的是"以集合为元素的集合". 其实，我们早已声明(p.3)集合的元素还是集合，所以"集组"就是集合. 这里采用"集组"这一名称只是为了分清层次.

② 这里，我们说 M 的"成员"，指的是M的元素，即集组 M 包含的集合. 这也是为了分清层次.

现在做个通俗的比喻．一个集合(集组)可看作是把一些物品放在一个口袋里，当成一个单独的思维对象． 这些物品仍是集合，它们各有自己的口袋(口袋可能交叉，)．对集组求并，可以比喻作撤掉袋中之袋(参看图 1)．



大口袋装的是M的三个成员，三个小口袋装的是这些成员的元素．

撤去袋中之袋，得到 $\bigcup(M)$．

图 1 求并的示意图

【注】 按定义，显然，集组M的任何成员必是并集$\bigcup(M)$的子集，即

$$\forall M\forall X(X\in M\Rightarrow X\subset\bigcup(M)).$$

作为并集的例示，先看两个简单情况．

【例 1】 $\bigcup(\varnothing)=\varnothing$．

这说的是，集组$\varnothing$本不含任何成员，把不存在的成员合并起来，结果还是空集．正式证明如下：我们断定$\bigcup(\varnothing)$不含任何元素，这是因为，如果不然，即存在某个$x\in\bigcup(\varnothing)$，则按定义，x属于$\varnothing$的至少一个成员X，这是不可能的． ∎

【例 2】 $\bigcup(\{A\})=A$．

这说的是，把一个集合A同自己合并起来，得到的还是A

自己．正式证明留给读者．值得注意的是，$\bigcup(\{\varnothing\})=\varnothing$，同 $\bigcup(\varnothing)$ 一样．

例 1 是对空集求并，例 2 是对单集求并．以下看对偶集求并．设给定偶集 $\{A, B\}$．我们记

$$A\cup B=\bigcup(\{A, B\}),$$

并称之为 A 与 B 的并集．按定义，

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \vee x\in B\}.$$

容易验证，对于集合 A，B，C：

$$A\cup B=B\cup A^{①}.\quad(交换律)$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)^{②}.\quad(结合律)$$

$$A\subset A\cup B.$$

$$A\cup\varnothing=A.$$

通过并集概念，可以得到偶集与单集的关系——$\{a, b\}$ 就是 $\{a\}$ 与 $\{b\}$ 的并集：

$$\{a, b\}=\{a\}\cup\{b\} \tag{1}$$

事实上，

$$x\in\{a, b\}\Longleftrightarrow x=a\vee x=b\Longleftrightarrow x\in\{a\}\vee x\in\{b\}$$
$$\Longleftrightarrow x\in\{a\}\cup\{b\}.$$ ▮

至今为止，除了空集，单集，偶集已有明确的意义外，具有更多给定元素的集合还没有定义．等式(1)启发我们，可以用偶集与单集的并集定义叁集③：

$$\{a, b, c\}=\{a, b\}\cup\{c\}.$$

---

① 看 p.15的底注 ①，i)．

② 用 p，q，r 记命题，我们有：(i) $(p\vee q)\vee r\Leftrightarrow p\vee(q\vee r)$．(ii) $(p\wedge q)\wedge r\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$．

③ “叁”、“肆”是汉字“三”、“四”的大写．

在此定义下,不难验证,

$$\{a, b, c\} = \{x | x = a \vee x = b \vee x = c\}.$$

类似地可以定义肆集:

$$\{a, b, c, d\} = \{a, b, c\} \cup \{d\},$$

并且

$$\{a, b, c, d\} = \{x | x = a \vee x = b \vee x = c \vee x = d\}.$$

含有更多的已知元素的集合可类似地定义.

在等式(1)中,如恢复 $\{a\} \cup \{b\}$ 的本来记法,我们有

$$\{a, b\} = \bigcup(\{\{a\}, \{b\}\}).$$

读者可从这里体会前面说的对集组求并就是"撤掉袋中之袋": 对集组 $\{\{a\}, \{b\}\}$ 求并,只要撤掉内部的花括号就可以了. 这样的直观描述对于有关问题的思考是有帮助的.

【例 3】 计算 $\bigcup(\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}\})$.

撤掉内部的花括号,并把重复的 b 只写一次,就得到结果 $\{a, b, c, d\}$. 正式验证也不困难.

【例 4】 试证: 不存在集合,包含一切单集.

分析: 假定存在集合 B, 包含一切单集. 这就是说 B 包含一切形如 $\{a\}$ 的集合, 其中 a 是任何集合. 如果对 B 求并,就把袋中之袋即每个 $\{a\}$ 的{ }撤掉, 也就得到包含每个集合 a 的"万有集"了.

证明: 设集合 B 包含一切单集. 按并集公理, $\bigcup(B)$ 是一集合. 对于任何的集合 a, $a \in \{a\}$. 但 $\{a\} \in B$, 故 $a \in \bigcup(B)$. 这样,集合 $\bigcup(B)$ 就包含一切集合. 按定理 2, 这是不可能的. ∎

本节的大部分内容可能是读者熟悉的. 但读者可能对本节引入的求并记号 $\bigcup(\ \ )$ 的用法还不习惯. 请看下例.

【例 5】 证明: $\bigcup(A\cup B)=(\bigcup(A))\cup(\bigcup(B))$.

这里,左边是先求集合 A, B 的并集 $A\cup B$, 然后把它作为集组求并(即把它的成员合并起来). 右边是先把 A, B 分别作为集组求并,得到集合 $\bigcup(A)$ 与 $\bigcup(B)$, 然后求最后两个集合的并集. 等式的证明如下:

$$
\begin{aligned}
x\in(\bigcup(A))\cup(\bigcup(B)) &\Longleftrightarrow x\in\bigcup(A)\vee x\in\bigcup(B)\\
&\Longleftrightarrow \exists X((X\in A\wedge x\in X)\vee(X\in B\wedge x\in X))\\
&\Longleftrightarrow \exists X((X\in A\vee X\in B)\wedge x\in X)^{①}\\
&\Longleftrightarrow \exists X(X\in A\cup B\wedge x\in X)\\
&\Longleftrightarrow x\in\bigcup(A\cup B).
\end{aligned}
$$
▌

§7 交 集

上节的并集公理保证了把一个集组的一切成员的一切元素汇集起来仍然得到一个集合. 现在看一个集组的一切成员的共同部分. 要不要设立新的公理, 保证这共同部分是一个集合? 以下的引理说明,这新的公理是不必要的.

【引理】 对于集组 $M\neq\varnothing$, 集合

$$A=\{x\mid\forall X(X\in M\Rightarrow x\in X)\}$$

存在且唯一.

证 由于 $M\neq\varnothing$, 可取 $X_0\in M$. 于是对于任何的 x, 条件 $\forall X(X\in M\Rightarrow x\in X)$ 同条件

$$x\in X_0\wedge(\forall X(X\in M\Rightarrow x\in X))$$

---

① 对于命题 p, q, r, 我们有

i) $(p\vee q)\wedge r\Leftrightarrow(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$.

ii) $(p\wedge q)\vee r\Leftrightarrow(p\vee r)\wedge(q\vee r)$.

是等价的。用 X_0 作为子集公理中的包容集，用 $\forall X(X \in M \Rightarrow x \in X)$ 作为子集公理中的条件 $C(x)$，则由子集公理及其注，知引理中的集合 A 存在且唯一。 ∎

读者可从引理的证明中体会子集公理的用法：已知一个集合论的条件 $C(x)$。如能找到一个包容集 B，包含满足 $C(x)$ 的一切 x，那么，我们就可肯定存在一个集合 $A(A\subset B)$，恰好包含一切满足 $C(x)$ 的 x。在前面的偶集和并集的问题中，集合论的条件是具备的，但可惜不能为希望存在的集合找到包容集，就只好为它们设立公理了。

为了简化书写，可把引理中 A 的元素的条件 $\forall X(X\in M \Rightarrow x \in X)$ 写成"$\forall X \in M(x \in X)$"，或夹杂通常文字来表示成"$x \in$ 每个 $X \in M$"。

【定义】 对于集组 $M \neq \varnothing$，记

$$\bigcap(M) = \{x \mid x \in \text{每个 } X \in M\},$$

并称之为集组 M 的成员的交集。

对集组 M 的动作 $\bigcap(\quad)$ 叫做对 M 求交。

【注 1】 按定义，显然，交集 $\bigcap(M)$ 必是(非空)集组 M 的任何成员的子集，即，对于任何 $M \neq \varnothing$，

$$\forall X(X \in M \Rightarrow \bigcap(M) \subset X).$$

【注 2】 对空集求交 $\bigcap(\varnothing)$ 没有意义。

这是因为，如对 $\bigcap(\varnothing)$ 按定义那样赋予意义

$$\bigcap(\varnothing) = \{x \mid \forall X(X \in \varnothing \Rightarrow x \in X)\},$$

那么，由于 $X \in \varnothing$ 总是错的，可见条件

$$\forall X(X \in \varnothing \Rightarrow x \in X)$$

对任何 x 成立。这样，$\bigcap(\varnothing)$ 就包含一切的集合 x，是不可能的(§4，定理 2)。 ∎

读者可能对此困惑不解：空无所有的集组 $\varnothing$ 的"成员"的共同部分反而是"万有集"！请你不必在此作无益的纠缠，只要看到，如把 $\bigcap(\varnothing)$ 当作集合，就会导致逻辑上的矛盾就可以了。

今后，对集组 M 求交时，必先判断 $M \neq \varnothing$。

【例 1】 对单集求交：$\bigcap(\{A\}) = A$.

这是显然的。

下面看对偶集求交。设给定偶集 $\{A, B\}$。我们记

$$A \cap B = \bigcap(\{A, B\}).$$

并称之为 A 与 B 的交集，按定义，

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

【例 2】 $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$.

容易验证，对于集合 A, B, C：

$$A \cap B = B \cap A^{①}. \quad \text{（交换律）}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)^{②}. \quad \text{（结合律）}$$

$$A \cap B \subset A.$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing.$$

以下是运算 $\cup$ 与 $\cap$ 之间的联系：

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$③. （第一分配律）

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. （第二分配律）

我们只证第二等式。事实上，对于任何的 x，

$$x \in A \cup (B \cap C) \Longleftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C$$

$$\Longleftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$$

---

① 看 p.15 的底注①，ii).
② 看 p.18 的底注②，ii).
③ 看 p.20 的底注①，i).

$$\Longleftrightarrow (x\in A\lor x\in B)\land(x\in A\lor x\in C)$$①

$$\Longleftrightarrow x\in A\cup B\land x\in A\cup C$$

$$\Longleftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C).$$ ∎

§8 差　集

对于集合 A, B, 我们考虑 A 中不属于 B 的那一部分元素. 以下引理肯定这一部分元素组成一个集合.

【引理】 对于集合 A, B, 集合

$$D=\{x\mid x\in A\land x\notin B\}$$

存在且唯一.

证 这里除条件 $x\notin B$ 已知外, 包容集 A 也已经给出. 故按子集公理及其注,集合 D 存在且唯一. ∎

【定义】 对于集合 A, B, 记

$$A-B=\{x\mid x\in A\land x\notin B\},$$

并称之为集合 A 与 B 的差集.

一般说来,定义中的 B 不一定是 A 的子集. 不过,在数学各分支中,人们往往是在某个基本集合里考虑问题. 设给定集合 E. 如考虑的集合 A,…都是 E 的子集: $A\subset E$…,就说 $E-A$ 是 A 的余集,简记作 $-A$. 关于余集, 以下的 de Morgan 法则是常用的:

$$-(A\cup B)=(-A)\cap(-B),$$

$$-(A\cap B)=(-A)\cup(-B).$$

① 看 p.20 的底注①, ii).

证明留给读者[1].

§9 幂 集

在集合论中,人们时常考虑一个给定的集合的一切子集。例如,叁集 $\{a, b, c\}$ 的一切子集可列举如下:

$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$,

它们形成一个捌集[2]. 一般来说,任意给定集合 A,以下公理保证 A 的一切子集形成一个新的集合:

幂集公理

对于集合 A,存在一个集合 P,恰好以 A 的一切子集为元素,即

$$\forall A \exists P \forall X (X \in P \Longleftrightarrow X \subset A)$$[3]

【幂集公理的注】 由外延公理可知,幂集公理中的集合 P 是唯一的.

【定义】 对于集合 A,记

$$\mathscr{P}(A) = \{X | X \subset A\},$$

并称之为 A 的幂集.

对集合 A 进行的动作 $\mathscr{P}(\ )$ 叫做对 A 求幂.

定义指的是

① 对于命题 p, q, 我们有: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$; $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$.

② "捌"是汉字"八"的大写.

③ 关于 X 的条件 $X \subset A$ 的正式表达式为

$$\forall x (x \in X \Rightarrow x \in A).$$

$$\forall X(X\in\mathscr{P}(A)\Leftrightarrow X\subset A).$$

可以说，引入幂集概念，就可把X与A之间的被包容关系写成X与$\mathscr{P}(A)$之间的属于关系。

任何集合A的幂集$\mathscr{P}(A)$永远不是空集，因为它至少包含一个元素$\varnothing$（$\varnothing$是任何集合A的子集）。如$A\neq\varnothing$，则$\mathscr{P}(A)$至少包含两个①不同的元素$\varnothing$及A（A总是自己的子集），例如，$\mathscr{P}(\varnothing)=\{\varnothing\}$，含有一个元素；$\mathscr{P}(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，含有两个元素；$\mathscr{P}(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$，含有四个元素，等等。

关于幂集，我们有以下的简单性质：

$$A\subset B\Leftrightarrow\mathscr{P}(A)\subset\mathscr{P}(B).\tag{1}$$

$$\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subset\mathscr{P}(A\cup B).\tag{2}$$

$$\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A\cap B).\tag{3}$$

请读者自己证明(1)，(3)，以下证明(2)：

$$\begin{aligned}&X\in\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\\&\quad\Rightarrow X\in\mathscr{P}(A)\vee X\in\mathscr{P}(B)\\&\quad\Rightarrow X\subset A\vee X\subset B\\&\quad\Rightarrow X\subset A\cup B\\&\Rightarrow X\in\mathscr{P}(A\cup B).\end{aligned}$$ ∎

这里第一行 ⇒ 第二行 ⇒ 第三行，以及第四行 ⇒ 第五行都按定义是可逆的。至于第三行 ⇒ 第四行则是根据$A\subset A\cup B$且$B\subset A\cup B$。这个 ⇒ 是不可逆的。从X是$A\cup B$的子集推不出X是A，B之一的子集。例如设$A=\{a\}$，$B=\{b\}$，其中$a\neq b$，则$A\cup B=\{a,b\}$。这里$\{a,b\}$是$A\cup B$的子

① 自然数的概念是在第三章才引入的。这里，所谓"两个"，"三个"，"四个"等等只能按其直观意义来理解。这些词语与我们的逻辑系统无关。

集，但它既非 A 的子集，也非 B 的子集。由此可见，公式(2)中的包容符号 $\subset$ 不能变为等号。

在 §6，我们曾把对集组求并比喻作"撤掉袋中之袋"。现在，对集合 A 求幂可以比喻作在装 A 的元素的口袋里添加一切可能的口袋，每个口袋装上 A 的一些元素，形成 A 的一个子集(允许口袋交叉，也允许口袋不装元素)。可以设想，如果先对 A 求幂（在 A 的口袋里添加一切可能的口袋），得到 $\mathscr{P}(A)$，然后对集组 $\mathscr{P}(A)$ 求并(撤掉袋中之袋)，其结果应还原为 A。这就是公式

$$\bigcup(\mathscr{P}(A)) = A.$$

正式证明如下：

$$x \in \bigcup(\mathscr{P}(A)) \Rightarrow x \in \text{某 } X \in \mathscr{P}(A)$$
$$\Rightarrow x \in \text{某 } X \subset A \Rightarrow x \in A.$$
$$x \in A \underset{A \in \mathscr{P}(A)}{\Longrightarrow} x \in \bigcup(\mathscr{P}(A)).$$

但要注意，若把这里的求幂与求并的动作颠倒，则一般只能有

$$M \subset \mathscr{P}(\bigcup(M)),$$

就不一定成为等式了。请读者证明后一公式，举出等式不成立的反例，并用撤袋与加袋的比喻考虑等式不一定成立的直观解释。

习 题 一

1. 证明 $A \subset \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$。
2. 证明 $A \subset B \wedge B \subset C \wedge C \subset A \Longrightarrow A = B = C$。
3. 定义(暂不考虑 0, 1, 2, 3 是否通常的自然数)

$$0 = \varnothing,\ 1 = \{0\},\ 2 = 1 \cup \{1\},\ 3 = 2 \cup \{2\}.$$

   1) 将 2, 3 分别表示为偶集，叠集。
   2) 证明 0, 1, 2, 3 各不相同。

3) 证明 $0 \in 1 \in 2 \in 3$ 且 $0 \subset 1 \subset 2 \subset 3$.

4) 证明 $\bigcup(0)=0$, $\bigcup(1)=0$, $\bigcup(2)=1$, $\bigcup(3)=2$.

4. 证明 $\bigcup(\{A\}) = A$.

5. 证明

1) $A \cup B = B \cup A$.

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

3) $A \subset A \cup B$.

4) $A \cup \varnothing = A$.

6. 证明 $A \subset B \Longrightarrow \bigcup(A) \subset \bigcup(B)$.

7. 举出 $A \neq B$ 但 $\bigcup(A) = \bigcup(B)$ 的例子.

8. 证明不存在包含一切偶集的集合.

9. 设 $B = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$. 求

1) $\bigcup(B)$, 2) $\bigcap(B)$, 3) $\bigcap(\bigcup(B))$, 4) $\bigcup(\bigcap(B))$.

10. 假定实数集 $\boldsymbol{R}$ 为已知. 试化简

$$\{x \in \boldsymbol{R} \mid x^2 > 2\} \cap \{x \in \boldsymbol{R} \mid |x-2| < |x+3|\}.$$

11. 证明

1) $A \cap B = B \cap A$.

2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3) $A \cap B \subset A$.

4) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

12. 证明 $\bigcap(\{A\}) = A$.

13. 证明,若 A, B 非空,则

$$\bigcap(A \cup B) = (\bigcap(A)) \cap (\bigcap(B)).$$

14. 按第 3 题的定义,设 $A = \{\{1,3\},2,\{2\}\}$. 求

$$\bigcap(\bigcup(A) - 3).$$

15. 证明以下三个命题同 $A \subset B$ 等价:

1) $A - B = \varnothing$, 2) $A \cup B = B$, 3) $A \cap B = A$.

16. 设 U 是基本集. 证明以下两命題同 $A \subset B$ 等价:

1) $A \cap (-B) = \varnothing$, 2) $(-A) \cup B = U$.

17. 证明

1) $-(A\cup B)=(-A)\cap(-B)$.

2) $-(A\cap B)=(-A)\cup(-B)$.

18. 证明

1) $(A\cap B)\cup(A-B)=A$.

2) $A\cup(B-A)=A\cup B$.

3) $A-(A\cap B)=A-B$.

4) $A-(A-B)=A\cap B$.

19. 定义

$$A\dot{-}B=(A-B)\cup(B-A),$$

并称之为 A 与 B 的对称差集. 证明

1) $A\dot{-}B=B\dot{-}A$.

2) $A\dot{-}(B\dot{-}C)=(A\dot{-}B)\dot{-}C$.

3) $A\cap(B\dot{-}C)=(A\cap B)\dot{-}(A\cap C)$.

4) $A\dot{-}\varnothing=A$.

5) $(A\dot{-}B)\cup(A\cap B)=A\cup B$.

6) $A\dot{-}B=\varnothing\Leftrightarrow A=B$.

7) $A\dot{-}C=B\dot{-}C\Longrightarrow A=B$.

20. 计算

1) $3-\bigcup(\mathscr{P}(1))$.　2) $\bigcap(\bigcup(\mathscr{P}(2)-2))$.

21. 计算

1) $\bigcup(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)))$.　2) $\bigcap(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))))$.

22. 证明,对于任何的集合 A, $2\in\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(A)))$.

23. 证明

1) $A\subset B\Leftrightarrow\mathscr{P}_{(A)}\subset\mathscr{P}_{(B)}$.　2) $\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A\cap B)$

3) $A\subset\mathscr{P}(\bigcup(A))$, 并举出等号不成立的例子.

24. 举出 $a\in A$ 但 $\mathscr{P}(a)\notin\mathscr{P}(A)$ 的例子.

25. 证明 $a\in A\Longrightarrow\mathscr{P}(a)\in\mathscr{P}(\mathscr{P}(\bigcup(A)))$.

26. 证明 $\mathscr{P}(A)=\mathscr{P}(B)\Longrightarrow A=B$.

第二章　关系与函数

§1 序　偶

在第一章§5，我们曾定义了偶集 $\{a, b\}$. 在那定义下，我们看到 $\{a, b\}=\{b, a\}$. 因此，我们又把偶集叫做无序偶，就是说，在偶集 $\{a, b\}$ 中，a, b 之间是没有先后次序的. 在数学中，考虑更多的是"序偶"(a, b)，通俗地说，序偶就是有先后次序的一对. 例如，解析几何中平面点的坐标 (a, b) 就是实数的序偶，除非 a, b 相同，(a, b) 和 (b, a) 就表示不同的点. 我们当前的任务是，用前章已有的概念定义序偶概念. 这里有一个基本要求：每个序偶的第一项和第二项都是唯一确定的，这就是说，如 $(a, b)=(c, d)$，则必有 $a=c$ 且 $b=d$. 符合这个要求的定义不止一个. 以下是通用的 Kuratowski 的定义，它是用一种特殊形式的偶集来定义序偶的.

【定义】 对于集合 a, b, 记

$$(a, b)=\{\{a\}, \{a, b\}\},$$

并称之为序偶. a 叫做序偶 (a, b) 的第一坐标，b 叫做序偶 (a, b) 的第二坐标.

这里，我们用偶集 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 定义了序偶 (a, b). 这偶集的成员是单集 $\{a\}$ 和偶集 $\{a, b\}$. a 同时是这单集和偶

集的元素而 b 只是这偶集的元素，它们处于不同的地位，从而把它们区别为序偶 (a, b) 的第一坐标和第二坐标. 不过，单单能把 a, b 区别开来是不够的(参看习题二，第1题)，序偶的定义应满足下面提出的基本要求：

【定理1】 $(a, b)=(c, d) \Longleftrightarrow a=c \wedge b=d.$

证 $\Leftarrow$部分显然. 只证$\Rightarrow$部分. 设 $(a, b)=(c, d)$，即设 $\{\{a\}, \{a, b\}\}=\{\{c\}, \{c, d\}\}$. 我们有①

或者 1) $\{a\}=\{c\} \wedge \{a, b\}=\{c, d\}$，此时②

$$a=c \wedge((a=c \wedge b=d) \vee(a=d \wedge b=c)).$$

或者 i) $a=c \wedge b=d$,

或者 ii) $a=c \wedge(a=d \wedge b=c)$，此时 $a=b=c=d$，是 i) 的特殊情况.

或者 2) $\{a\}=\{c, d\} \wedge \{a, b\}=\{c\}$，即 $a=c=d \wedge c=a=b$. 此时又得到 $a=b=c=d$. ▌

在具体运用中，关于序偶，往往不直接引用它的定义，而引用反映其基本特性的定理1.

---

①② $\{x, y\}=\{u, v\} \Longrightarrow(x=u \wedge y=v) \vee(x=v \wedge y=u)$.

事实上，由题设，x, y 都是偶集 $\{u, v\}$ 的元素：

$$(x=u \vee x=v) \wedge(y=u \vee y=v).$$

或者 1) $x=u \wedge y=v$;

或者 2) $x=v \wedge y=u$;

或者 3) $x=u \wedge y=u$，此时，$x=y$，故 $\{u, v\}=\{x, y\}=\{x\}$，故 $u=v=x=y$;

或者 4) $x=v \wedge y=v$，此时同样有 $u=v=x=y$.

但情形 3)，4)是情形 1)或 2)的特殊情况. ▌

§2 笛卡尔积

设已知集合 A, B. 考虑这样的序偶 (a, b): 其中 $a \in A$, $b \in B$. 现在看，一切可能的这样的序偶是否定能形成一个集合? 换句话说，满足条件①

$$\exists a \in A \exists b \in B(x = (a, b))$$

的一切 x 是否定能形成一个集合? 只要为它们找到一个包容集就可以了。我们知道，

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

由于 $a \in A$ 且 $b \in B$, 故 $\{a\} \subset A \subset A \cup B$ 且 $\{a, b\} \subset A \cup B$. 由此得到 $\{a\} \in \mathscr{P}(A \cup B)$ 且 $\{a, b\} \in \mathscr{P}(A \cup B)$, 从而，由 $\{a\}$, $\{a, b\}$ 组成的偶集 (a, b) 是 $\mathscr{P}(A \cup B)$ 的子集，这就是说 $x = (a, b) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$, 后者就是我们需要的一个包容集. 由子集公理及其注，以下引理成立:

【引理】 对于集合 A、B, 集合

$$P = \{x \mid \exists a \in A \exists b \in B(x = (a, b))\}$$

存在且唯一.

引理中的 P 还可再简写为

$$P = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

【定义】 对于集合 A, B, 记

---

① 这里是正式条件的简写. 在前章，考虑的问题比较简单，当时关于集合元素的条件都可较轻易地按那一章的§3的规定写出. 随着概念的积累（原始概念定义新概念，新概念定义更新的概念，等等），如果总是用符合第一章，§3 规定的公式来表达集合元素的条件，就将越来越繁，而且将越来越远离直观. 这样，我们就不得不采用简写的公式（甚至夹杂通常文字）来表达条件，但要求这些简写的公式确能最终还原为正式的公式.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\},$$

并称之为A与B的笛卡尔积.

例如,如认为实数集(实数轴) $\boldsymbol{R}$ 为已知,则 $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ 就是数平面,它的元素就是数平面上点的笛卡尔坐标. 这就是"笛卡尔积"一词的来源.

以下是笛卡尔积的一些简单性质:

$$A \subset C \wedge B \subset D \Rightarrow A \times B \subset C \times D.$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

$$A \times B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing.$$

请读者自己验证. 对于笛卡尔积,交换律 $A \times B = B \times A$ 显然不一般成立.

§3 关　　系

不论在日常生活中或在数学中,我们都经常遇到"关系"这个概念,如父子关系,同学关系,等于关系,小于关系,属于关系,函数关系等等. 本节将给关系概念设立一个数学定义. 为了启发,先看一个生活中的例子. 有两个男人 X, Y 和三个男孩 x, y, z. 假定X是x和y的父亲,Y是z的父亲. 我们把父亲写在前面,把儿子写在后面,就配成了三个序偶 (X, x), (X, y), (Y, z). 这些序偶组成的集合 $\{(X,x), (X,y), (Y, z)\}$ 就确定了这些人之间的父子关系. 再看一个数学中的例子. 我们把实数 x 写在前面,把它的正弦值写在后面①,就配成一个序偶. 这样的一切序偶组成的集合 $\{(x, y) \in$

① 我们在举例时,有时引用本书前面没有涉及到但认为读者已知的概念或结果,甚至举出生活中的例子. 这些例子的出现不影响正文的逻辑系统.

$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}|y=\sin x\}$就确定了定义在实数轴 $\boldsymbol{R}$ 上的正弦函数关系.

以下是关系概念的数学定义:

【定义】 一个以序偶为元素的集合 R 叫做一个关系.即,集合 R 叫做一个关系,当且仅当

$$\forall x(x\in R\Rightarrow\exists a\exists b(x=(a,b)).$$

这里定义的关系概念是非常一般的. 不过,应该指出:第一,关系的元素必须都是序偶,不得搀杂其他的集合;第二,这些序偶必须组成集合,不能漫无边际. 例如,一切序偶就形成不了集合(习题二,2).

按照通常的写法,当 R 是一关系时,也把 $(a,b)\in R$ 记作 aRb.

【例 1】 设给定集合 A,则

$$R=\{(x,x)|x\in A\}$$

就是一个关系,这是因为,R 有包容集 $A\times A$. R 就是集合 A 中的等于关系.

【例 2】 设给定集合 E,则

$$R=\{(A,B)|A,B\subset E\wedge\forall x(x\in A\Rightarrow x\in B)\}$$

就是一个关系,这是因为 R 有包容集 $\mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(E)$. R 是 E 的子集之间的包容关系.

读者可以举出更多的关系的例子.

设给定一个关系 R,就是说,给定一个由序偶组成的集合 R. 以下引理肯定这些序偶的第一坐标和第二坐标也分别组成集合.

【引理】 对于关系 R,以下集合分别存在且唯一:

$$A=\{x|\exists y((x,y)\in R)\},\quad B=\{y|\exists x((x,y)\in R)\}.$$

证 我们只证 A 的唯一存在性. 为它找到一个包容集就可以了. 事实上,所谓 $(x,y)\in R$, 就是偶集 $\{\{x\},\{x,y\}\}\in R$. 这说明 $\{x\}$ 属于 R 的一个成员,故 $\{x\}\in\bigcup(R)$. 这又说明 x 属于 $\bigcup(R)$ 的一个成员,故 $x\in\bigcup(\bigcup(R))$. 由子集公理及其注,知集合 A 存在且唯一. ▮

把这引理的证明同§2的引理的证明对比一下是有益的. 我们曾在第一章的§6和§9分别用"撤掉袋中之袋"和"在口袋中添加一切可能的口袋"来比喻对集合求并和求幂. 现在仍借用这两个比喻的语言. 在本节引理的证明中,是从 $\{\{x\},\{x,y\}\}\in R$ 出发,去寻找 x 属于怎样一个集合. x 处于 R 的口袋里的两层口袋之中. 对 R 连续求并两次,就把两层口袋撤掉,x 也就露出在 $\bigcup(\bigcup(R))$ 的口袋之中了. 在§2的引理的证明中,是从 $a\in A$, $b\in B$ 出发,去寻找 $\{\{a\},\{a,b\}\}$ 属于怎样一个集合. 这个偶集是在 $A\cup B$ 的口袋里添加两层口袋而得到的. 对 $A\cup B$ 连续求幂两次,就添加了两层一切可能的口袋,形如 $\{\{a\},\{a,b\}\}$ 的成员也就在 $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A\cup B))$ 口袋里面形成了.

【定义】 对于关系 R,记

$$\mathrm{dom}\,(R)=\{x\mid\exists y((x,y)\in R)\},$$

并称之为 R 的定义域;记

$$\mathrm{ran}\,(R)=\{y\mid\exists x((x,y)\in R)\},$$

并称之为 R 的值域①.

例如,在上面的例1中, $\mathrm{dom}\,(R)=\mathrm{ran}\,(R)=A$. 在例2中, $\mathrm{dom}\,(R)=\mathrm{ran}\,(R)=\mathscr{P}(E)$. 又如,如 $R=\varnothing$,

① dom 是英文 domain 的缩写, ran 是英文 range 的缩写.

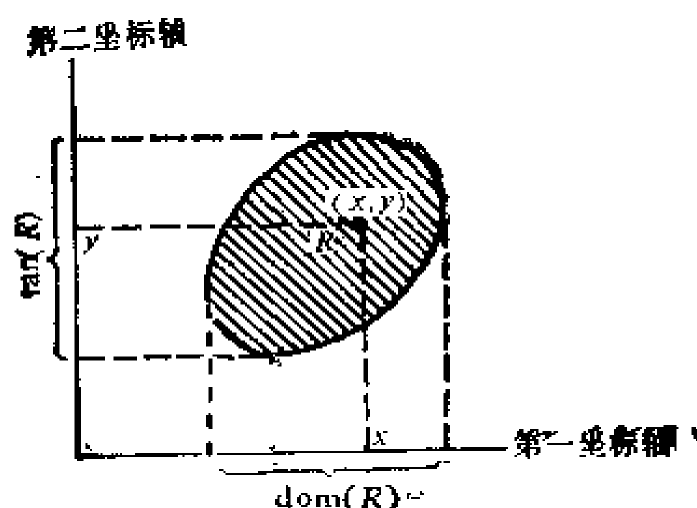


图 2 定义域与值域示意图

则 $\operatorname{dom}(R)=\operatorname{ran}(R)=\varnothing$. 如 $R=A\times B$，其中 $A\neq\varnothing$ 且 $B\neq\varnothing$，则 $\operatorname{dom}(R)=A$，$\operatorname{ran}(R)=B$.

利用几何术语，关系 R 的定义域也可称为 R 的第一坐标投影，R 的值域也可称为 R 的第二坐标投影(参看图 2).

在以上的议论中，关系概念是非常一般的. 不管怎样的序偶组成的全体，只要它是集合，它就是一个关系. 在数学的各分支里，人们往往考虑两个集合之间的关系和一个集合里边的关系.

对于集合 X，Y 和关系 R，当且仅当 R 是 $X\times Y$ 的子集，即 $R\subset X\times Y$ 时，说 R 是 X 与 Y 的一个关系.

例如，以上例 1 中的关系 R 是 A 与 A 的一个关系；例 2 中的关系 R 是 $\mathscr{P}(E)$ 与 $\mathscr{P}(E)$ 的一个关系；笛卡尔积 $A\times B$ 是 A 与 B 的一个关系；空集 $\varnothing$ 是 $\varnothing$ 与任何集合 A 的唯一关系.

显然，当 R 是 X 与 Y 的关系，即 $R\subset X\times Y$ 时，

$$\operatorname{dom}(R)\subset X,\quad \operatorname{ran}(R)\subset Y.$$

更特殊的情况是 $X=Y$. 对于集合 X 和关系 R，当且

仅当R是X与X的关系，即 $R\subset X\times X$ 时，说R是X中的一个关系。

例如，以上例 1 中的关系R是A中的关系；例 2 中的R是$\mathscr{P}(E)$ 中的关系；空集$\varnothing$是$\varnothing$中的唯一关系。

【例 3】 假定正整数集 $\boldsymbol{Z}^+$ 为已知. 关系

$$R=\{(n,m)\in\boldsymbol{Z}^+\times\boldsymbol{Z}^+|\exists j\in\boldsymbol{Z}^+(m=n+j)\}$$

就是 $\boldsymbol{Z}^+$ 中的小于关系"<"。对于 $(n,m)\in$"<"，通常记 $n<m$。

【例 4】 假定整数集 $\boldsymbol{Z}$ 为已知。 当且仅当两整数之差 $n-m$能被 3 整除时，说 nRm，就是说

$$R=\{(n,m)\in\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}|\exists s\in\boldsymbol{Z}(n-m=3s)\}.$$

R是$\boldsymbol{Z}$ 中一个关系。

§4 等价关系

我们先看一个集合X中的等于关系"="。我们知道，对于任何的 $x, y, z\in X$，

1) $x=x$，

2) $x=y\Rightarrow y=x$，

3) $x=y\wedge y=z\Rightarrow x=z$。

以下介绍的等价关系是等于关系保留这三个基本性质的推广。

【定义】 集合X中的一个关系R叫做等价关系，当且仅当，对于任何的 $x, y, z\in X$，

1) （自反性） xRx，

2) （对称性） $xRy\Rightarrow yRx$，

3)（传递性）$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

当R是等价关系且 xRy 时，我们说x等价于y. 既然R有对称性，也不妨说 x，y 互相等价.

不难验证，上节末尾例4的R是等价关系，而例3的$<$则不是.

【注】 在上节，我们定义X中的关系R时，只要求 $R \subset X \times X$，从而只能推出 $\mathrm{dom}(R) \subset X$，$\mathrm{ran}(R) \subset X$. 这就是说，一般来说，一个集合$X$中的关系 R，其定义域和值域都是X的子集，但不一定充满 X. 不过，如R是X中的等价关系，则

$$\mathrm{dom}(R) = \mathrm{ran}(R) = X.$$

事实上，由R的自反性，对于任何的$x \in X$，都有$(x,x) \in R$，可见x必属于 $\mathrm{dom}(R)$ 和 $\mathrm{ran}(R)$. ▌

由证明还可看出，对于集合 X，等于关系是任何等价关系的子集，故可说，等于关系是最小的等价关系. 另一方面，$X \times X$是最大的等价关系，即X中的任何等价关系都是等价关系$X \times X$的子集.

与等价关系密切联系着的有以下的等价类概念:

【定义】 设给定集合X及其中的等价关系R. 对于每一$x \in X$，把一切与x等价的y组成的X的子集叫做x的 R-等价类，记以 $[x]_R$，即

$$[x]_R = \{y \in X \mid xRy\}.$$

例如，如R指的是X中的等于关系，那么，对于每个 $x \in X$，$[x]_R$ 就是单集 $\{x\}$. 如所说的等价关系是上节末尾例4的 R，那么，对于每一 $n \in \boldsymbol{Z}$，

$$[n]_R = \{n - 3s \mid s \in \mathbf{Z}\}.$$

【定理 2】 设给定集合 X 及其中的等价关系 R. 对于任何的 $x, y \in X$,

$$[x]_R = [y]_R \Longleftrightarrow xRy.$$

证 1) 设 $[x]_R = [y]_R$. 由自反性, $y \in [y]_R$, 故 $y \in [x]_R$. 按定义, xRy.

2) 设 xRy. 如 $z \in [y]_R$, 即 yRz, 则由传递性, xRz, 即 $z \in [x]_R$. 另一方面, 由对称性, 假设 xRy 等于假设 yRx. 因此, 完全一样地, 由 $z \in [x]_R$ 推出 $z \in [y]_R$. 最后得到 $[x]_R = [y]_R$. ∎

【推论】 设给定集合 X 及其中的等价关系 R. 对于任何的 $x, y \in X$,

$$x, y \text{ 属于同一等价类} \Longleftrightarrow xRy.$$

这是显然的.

在不少场合,需要对一个给定的集合 X 进行分类,即把集合 X 划分成一些子集,要求: (1)不漏掉 X 的任何元素;(2)两个不同子集不相重叠. 正式定义如下:

【定义】 设给定集合 X. 由 X 的非空子集组成的集组 Π 叫做 X 的一个分类,当且仅当:

1) $\bigcup(\Pi) = X$,

2) $\forall A, B \in \Pi(A \neq B \Rightarrow A \cap B = \varnothing)$.

以下是等价关系与集合分类的重要联系:

【定理 3】 设给定集合 X 及其中的等价关系 R. 那么, X 的一切等价类的集合

$$P = \{[x]_R \mid x \in X\}$$①

是X的一个分类.

证 1) 对于任何的 $x \in X$，由自反性，$x \in [x]_R \in P$，故 $x \in \bigcup(P)$，于是 $X \subset \bigcup(P)$. 另一方面，显然 $\bigcup(P) \subset X$.

2) 我们证明，如两个等价类 $[x]_R$ 与 $[y]_R$ 有共同元素，它们必重合. 事实上，如 $z \in [x]_R$ 且 $z \in [y]_R$，即 xRz 且 yRz，则由对称性及传递性，xRy. 按定理 2，

$$[x]_R = [y]_R. \quad ▌$$

把定理 3 同定理 2 的推论结合起来看，可以说，一个集合X中的一个等价关系给出X的一个分类，每一类中的元素都互相等价，而且互相等价的元素必在同一类.

定理 3 中的分类P叫做集合X的R-商集，记为 X/R:

$$X/R = \{[x]_R \mid x \in X\}.$$

例如，§3 末尾例 4 的等价关系R把整数集 $\boldsymbol{Z}$ 分成三个等价类：$[0]_R$，$[1]_R$，$[2]_R$. 商集是

$$\boldsymbol{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}.$$

这里$[0]_R$ 包含 0，3，-3，6，-6，等等；$[1]_R$ 包含 1，4，-2，7，-5，等等；$[2]_R$ 包含 2，5，-1，8，-4，等等.

§5 关系的逆与复合

还从 §3 开头所说的父子关系说起. 当时，我们说 $R = \{(X,x), (X,y), (Y,z)\}$ 确定了一些人之间的父子关系，例如，$(X, x) \in R$ 意味着X是x的父亲. 这关系可以倒过来

① 这指的是，对于一切 $x \in X$，等价类 $[x]_R$ 组成的集合. 不过，如 xRy，则 $[x]_R$ 与 $[y]_R$ 重合，这时 $[x]_R$ 与 $[y]_R$ 是同一等价类.

看．序偶的集合$\{(x, X), (y, X), (z, Y)\}$确定了这些人之间的子父关系，例如，$(x, X)$属于这关系意味着$x$是$X$的儿子．在数学中也有类似的情况．在§3的例3中，我们看到，正整数集$\boldsymbol{Z}^+$中的关系$R = \{(n, m) \in \boldsymbol{Z}^+ \times \boldsymbol{Z}^+ \mid \exists j \in \boldsymbol{Z}^+ (m = n + j)\}$是$\boldsymbol{Z}^+$中的小于关系．$(n, m) \in R$意味着$n < m$．在演算中，为了方便，有时也写$m > n$．就是说，$n < m \Longleftrightarrow m > n$．这时，$(m, n) \in \{(m, n) \in \boldsymbol{Z}^+ \times \boldsymbol{Z}^+ \mid \exists j \in \boldsymbol{Z}^+ (m = n + j)\}$．后一集合就是$\boldsymbol{Z}^+$中的大于关系．又如，

$$R = \left\{(x, y) \mid x, y \in \boldsymbol{R} \wedge -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \wedge y = \sin x\right\}$$

是定义在实数区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上的正弦函数关系，而

$$\left\{(y, x) \mid x, y \in \boldsymbol{R} \wedge -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \wedge y = \sin x\right\}$$

就是反正弦函数关系．以下是关系之逆的数学定义：

【定义】　对于关系R，记

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\},$$

并称之为关系R之逆．

这就是说，

$$xRy \Longleftrightarrow yR^{-1}x.$$

例如$\boldsymbol{Z}^+$中的小于关系"$<$"的逆就是大于关系"$>$"．又如等价关系（包括等于关系）由于有对称性，它与自己的逆重合．

【注】　显然，对于任何的关系R，

$\text{dom}(R^{-1}) = \text{ran}(R)$, $\text{ran}(R^{-1}) = \text{dom}(R)$.

【定理 4】 对于任何关系 R,

$$(R^{-1})^{-1} = R.$$

证 $(x, y) \in R \Longleftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \Longleftrightarrow (x, y) \in (R^{-1})^{-1}$. ∎

以下考虑关系的复合. 仍以父子关系 $S = \{(X, x), (X, y), (Y, z)\}$ 为例. 又假定 A 是 X 的父亲,即又有了一个父子关系 $R = \{(A, X)\}$. 把两个父子关系"复合"起来,就得到一个祖孙关系 $\{(A, x), (A, y)\}$. 又如,设

$$R_1 = \{(x, y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \mid x = y^2\},$$
$$S_1 = \{(y, z) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \mid y = z + 1\}.$$

把这两个关系"复合"起来,就得到关系

$$\{(x, z) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \mid x = (z + 1)^2\}.$$

【定义】 对于关系 R 和 S, 记

$$S \circ R = \{(x, z) \mid \exists y((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)\},$$

并称之为关系 R 与 S 的复合.

这就是说,

$$x(S \circ R)z \Longleftrightarrow \exists y(xRy \wedge ySz).$$

例如,设 $R = \{(1, 2), (1, 3)\}$, $S = \{(1, 4), (2, 5)\}$, 则 $S \circ R = \{(1, 5)\}$, $S \circ R^{-1} = \{(2, 4), (3, 4)\}$, $R \circ S = \varnothing$, $R^{-1} \circ S = \varnothing$, $R^{-1} \circ S^{-1} = \{(5, 1)\}$.

又如,对于上例的关系 R_1, S_1,

$$S_1 \circ R_1 = \{(x, y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \mid x = (y + 1)^2\},$$
$$R_1 \circ S_1 = \{(x, y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \mid x = y^2 + 1\}.$$

由以上例子可以看出,复合运算 $\circ$ 不能一般满足交换律. 然而,结合律总是成立的:

【定理 5】 对于关系 R, S, T,

$$T\circ(S\circ R)=(T\circ S)\circ R.$$

证 $(x,u)\in T\circ(S\circ R)$

$\iff \exists z((x,z)\in S\circ R\wedge(z,u)\in T)$

$\iff \exists y\exists z((x,y)\in R\wedge(y,z)\in S\wedge(z,u)\in T)$

$\iff \exists y((x,y)\in R\wedge(y,u)\in T\circ S)$

$\iff (x,u)\in(T\circ S)\circ R.$ ▮

以下是关系的逆与关系的复合的联系：

【定理 6】 对于关系 R, S,

$$(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}.$$

证 $(x,z)\in(S\circ R)^{-1}$

$\iff (z,x)\in S\circ R$

$\iff \exists y((z,y)\in R\wedge(y,x)\in S)$

$\iff \exists y((x,y)\in S^{-1}\wedge(y,z)\in R^{-1}\}$

$\iff (x,z)\in R^{-1}\circ S^{-1}.$ ▮

§6 函　数

我们知道，由序偶组成的任何集合 R 都是关系，对于任何 $x\in\mathrm{dom}(R)$，允许不同的 y 和它配对，使 $(x,y)\in R$ (参看图 2)。以下定义的函数是一种特殊类型的关系，要求对于其定义域中的每一个 x，只有一个第二坐标 y 和它配对，使 (x,y) 在这关系里(参看图 3)。

【定义】 一个关系 F 叫做一个函数，当且仅当对于任何的 x，使 $(x,y)\in F$ 的 y 总是唯一的，即

$$\forall x,y,z((x,y)\in F\wedge(x,z)\in F\Rightarrow y=z).$$

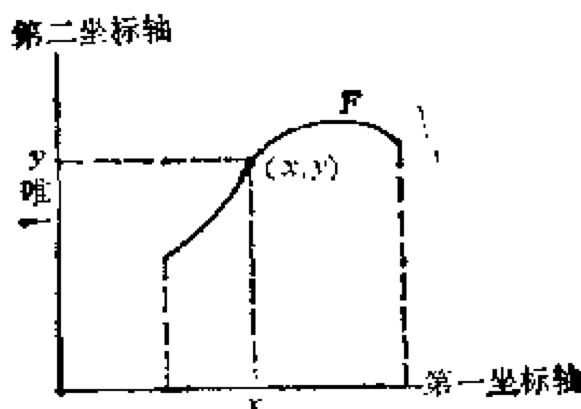


图 3　函数概念示意图

当 (x, y) 属于函数 F（即 xFy）时，我们记

$$y = F(x),$$

或

$$x \overset{F}{\longmapsto} y,$$

并称 $F(x)$ 为函数 F 在 x 的值，也说在函数 F 下，y 与 x 对应。

如 X 是函数 F（作为特殊类型的关系）的定义域，且 Y 是 F 的值域的一个包容集：

$$\mathrm{dom}(F) = X, \quad \mathrm{ran}(F) \subset Y,$$

就说 F 是从 X 到 Y 内的一个函数，记为

$$F: X \to Y.$$

此时，也说 F 是从 X 到 Y 内的一个映射。

当 $X = \mathrm{dom}(F)$ 时，有时说 F 是定义在 X 上的函数。

在数学的各分支里，按照 X，Y 的不同涵义，有时也把 $F: X \to Y$ 叫做变换，算子，泛函等等。

【例 1】　设给定集合 X。如下定义 I_X：对于每个 $x \in X$，

$$I_X(x) = x.$$

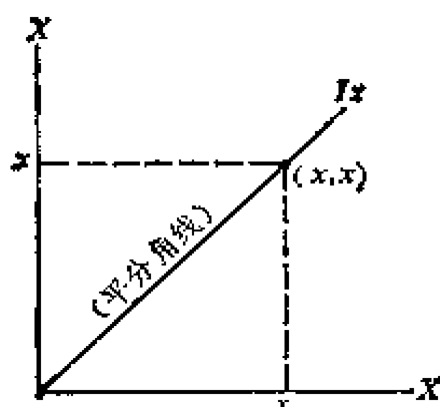


图 4 恒等函数示意图

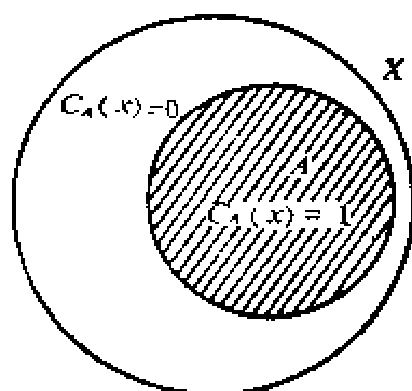


图 5 特征函数示意图

函数 I_X 叫做X上的恒等函数。它就是X中的等于关系（参看图 4）。

【例 2】 设给定集合 X，Y。设

$$p_1: X\times Y\to X, \text{其中 } p_1(x, y)=x;$$
$$p_2: X\times Y\to Y, \text{其中 } p_2(x, y)=y.$$

p_1 和 p_2 分别叫做从$X\times Y$到X和到Y的投影函数。

【例 3】 设给定集合X且 $A\subset X$。设 C_A：$X\to\{0, 1\}$，其中

$$C_A(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A,\\ 0, & \text{当 } x\notin A.\end{cases}$$

函数 C_A 叫做定义在X上的A的特征函数(参看图 5)。

【例 4】 设 R 是集合X中的一个等价关系。 如下定义 φ：$X\to X/R$：

$$\varphi(x)=[x]_R.$$

映射φ叫做集合X到它的商集 X/R 的自然映射（或称标准映射）。例如，在 § 4 末尾的例中，$\varphi(0)=\varphi(3)=\varphi(-3)=$

$[0]_{R_1}$，它是包含 0，3，－3，6 等等的集合．又如，

$$\varphi(1)=\varphi(4)=\varphi(-2)=[1]_{R_1},$$

$$\varphi(2)=\varphi(5)=\varphi(-1)=[2]_{R_1}.$$

【例 5】 设给定集合 X．我们把任何的 $F: X\times X\to X$ 叫做 X 中的一个运算．例如，实数集 $\boldsymbol{R}$ 中的加法，减法和乘法都是 $\boldsymbol{R}$ 中的运算．

现在考虑以下的问题：设 X，Y 是给定的集合．我们看从 X 到 Y 内的函数 $F: X\to Y$．这样一切可能的 F 能否形成一个集合？从具体的例子看一看：设 $X=Y=\boldsymbol{R}$．从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 内一切可能的函数可以想象是非常之多的，它们还能形成集合吗？对此，我们有以下的定理：

【定理 7】 对于集合 X，Y，一切 $F: X\to Y$ 组成一个集合．

证 只要找到包含这里一切 F 的一个包容集就可以了．按定义，

$$\text{dom}(F)=X,\quad \text{ran}(F)\subset Y$$

所以 $(x,y)\in F\Rightarrow(x,y)\in\text{dom}(F)\times\text{ran}(F)\subset X\times Y$．故 $F\subset X\times Y$，即 $F\in\mathscr{P}(X\times Y)$． ▌

【记号 Y^X】 我们用 Y^X 来记从 X 到 Y 内一切映射的集合．

例如，从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 内的一切函数组成集合 $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{R}}$．

【注 1】 $Y^{\varnothing}=\{\varnothing\}$．这就是说，从 $\varnothing$ 到任何集合 Y 的唯一映射是空集 $\varnothing$ 本身，即

$$F\text{ 是从 }\varnothing\text{ 到 }Y\text{ 的映射}\Longleftrightarrow F=\varnothing.$$

事实上，设 F 是从 $\varnothing$ 到 Y 的映射．如 $F\neq\varnothing$，则存在 $(x,y)\in F$．于是 $x\in\text{dom}(F)$，从而 $\text{dom}(F)\neq\varnothing$，与题设

矛盾. 另一方面,设 $F=\varnothing$. 则

1) $F=\varnothing$ 是关系,且 $\mathrm{dom}(F)=\varnothing$, $\mathrm{ran}(F)=\varnothing\subset Y$.

2) $F=\varnothing$ 是函数. 这是因为,对于任何的 x, y, z, $(x, y)\in\varnothing$ 同 $(x, z)\in\varnothing$ 都是错的. 所以

$$\forall x, y, z((x, y)\in\varnothing\wedge(x, z)\in\varnothing\Rightarrow y=z)$$

总是对的.

在注 1 中,不排斥 $Y=\varnothing$: $\varnothing^{\varnothing}=\{\varnothing\}$.

【注 2】 如 $X\neq\varnothing$, 则 $\varnothing^{X}=\varnothing$. 这就是说,从非空集合到空集 $\varnothing$ 的映射不存在.

事实上,设 $X\neq\varnothing$, 且存在 $F: X\to\varnothing$. 取 $x\in X=\mathrm{dom}(F)$. 按关系的定义域的定义,存在 y, 使 $(x, y)\in F$. 于是 $y\in\mathrm{ran}(F)$, 可见 $\mathrm{ran}(F)\neq\varnothing$, 与题设矛盾. ▮

注意,定理 7 说的是对于给定的集合 X, Y, 一切函数 $F: X\to Y$ 形成一个集合. 如果对定义域或值域不加限制,例如,一切函数就不能形成集合(参看习题二,第 21 题).

在函数概念里,我们规定了第二坐标的单值性,而对第一坐标的单值性并没有做一般的要求. 在众多的数学问题中,我们还希望函数具有后一单值性.

【定义】 设给定函数 F, 当且仅当对任何的 y, 使 $y=F(x)$ 的 x 总是唯一的,即,对于函数 F,

$$\forall x, y, z((x, y)\in F\wedge(z, y)\in F\Rightarrow x=z),$$

就说函数 F 是单叶的. ①

读者可以举出很多单叶的和非单叶的函数的例子.

---

① 不少书籍把单叶函数叫做"一一函数". 为了区别于传统的"一一对应", 本书不采用这个名称.

在单叶函数的定义中，并未事先指明 F 是哪一集合到哪一集合内的函数。当然，定义也包括映射 $F: X \to Y$ 的情形.

以下专门考虑从一个集合到另一集合内的映射 $F: X \to Y$. 按定义，我们只要求 $\operatorname{ran}(F)$ 是 Y 的子集，它不一定充满 Y. 例如，设 $F: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 如下定义：$F(x) = x^2$. 则

$$\operatorname{ran}(F) = \{0\} \cup \boldsymbol{R}^+,$$

并不充满 $\boldsymbol{R}$.

【定义】 对于映射 $F: X \to Y$，当且仅当

$$\operatorname{ran}(F) = Y$$

时，说 F 是从 X 到 Y 上的映射(函数)，也说映射 $F: X \to Y$ 是满占的.

例如，由 $F(x) = x^3$ 定义的映射 $F: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 就是满占的.

满占映射的定义只是在事先指明 F 是从一集合 X 到一集合 Y 内的映射时才有意义. 如果像单叶函数定义那样，不事先指明 F 是哪一集合到哪一集合的函数，那么，F 永远是 $\operatorname{dom}(F)$ 到 $\operatorname{ran}(F)$ 上的满占映射，定义就变成多余的了.

为了简便，当 $F: X \to Y$ 是单叶映射时，可叫做单射；当它是满占映射时，可叫做满射.

当且仅当 $F: X \to Y$ 是单射且是满射时，说它是双射，或说 F 是从 X 到 Y 上的一一对应.

例如，由 $F(x) = x^3$ 定义的 $F: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 就是从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 上的一个一一对应.

最后，我们引入有关函数的另一名称. 我们知道，函数是一种特殊类型的关系，即以序偶为元素的一种特殊类型的集合. 它有自己的定义域. 如果一个函数的定义域缩小了，这

个函数(作为集合)就不是原来的函数了。例如，由 $F(x)=x^2$ 定义的 $F:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 和由同样的解析式子 $f(x)=x^2$ 定义的 $f:[-1,2]\to\boldsymbol{R}$ 就不是同一函数(请读者画出二者的图象)。一般，设给定函数 F，并给定 $A\subset\mathrm{dom}(F)$，记

$$F\restriction A=\{(x,y)\in F\mid x\in A\},$$

并称之为 F 被 A 的限制。

例如，在上面例子中，$f=F\restriction[-1,2]$。

显然，$F\restriction A\subset F$。并且，只有当 $A=\mathrm{dom}(F)$ 时，$F\restriction A=F$。

§7 象和原象

函数的"象"和"原象"是数学中经常遇到的重要概念。我们将在本节较系统地论述这两个概念。为了适应多数数学分支的应用，我们把问题限制于事先指明所说的函数是哪个集合到哪个集合内的映射的情况。

【定义】 设给定 $F:X\to Y$，并给定 $A\subset X$。我们把一切 $x\in A$ 的对应值 $F(x)$ 组成的集合叫做在映射 F 下面 A 的象，记作 $F(A)$，即

$$F(A)=\{y\in Y\mid\exists x\in A(y=F(x))\}.$$

也可把 $F(A)$ 简写为

$$F(A)=\{F(x)\mid x\in A\}.$$

由于习惯的缘故，人们用记 F 在 x 的函数值 $F(x)$ 的同样记号 $F(A)$ 来记在 F 下面 A 的象。这是习惯记法的缺点。读者应从上下文来区分函数值 $F(x)$（其中 $x\in X$）和象 $F(A)$（其中 $A\subset X$）。

显然，$F(X)=\operatorname{ran}(F)$，$F(A)=\operatorname{ran}(F\upharpoonright A)$，$F(A)\subset\operatorname{ran}(F)$。

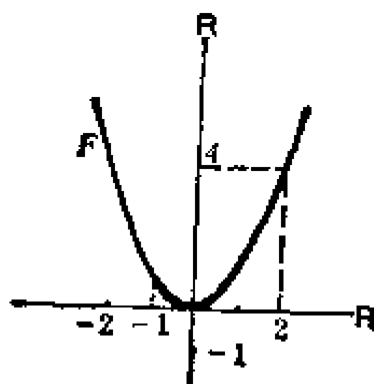


图 6

例如，设 F: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，其中 $F(x)=x^2$。则

$$F([-1,2])=[0,4]=\operatorname{ran}(F\upharpoonright[-1,2]).$$

（参看图 6）。

【定义】 设给定 F: $X\to Y$，且 $B\subset Y$。我们把使 $F(x)\in B$ 的一切 $x\in X$ 组成的集合叫做在映射 F 下面 B 的原象，记作 $F^{-1}(B)$，即

$$F^{-1}(B)=\{x\in X\mid \exists y\in B(y=F(x))\}.$$

也可把 $F^{-1}(B)$ 简记为

$$F^{-1}(B)=\{x\in X\mid F(x)\in B\}$$

这里要注意的是，在定义中，只假定 $B\subset Y$，并未假定 $B\subset\operatorname{ran}(F)$。$B$ 和 $\operatorname{ran}(F)$ 平等地成为 Y 的子集。这和上面象的定义中假定 $A\subset X=\operatorname{dom}(F)$ 不同。例如，在上例中，$F^{-1}([0,4])=[-2,2]$，同时 $F^{-1}([-1,4])$ 也等于 $[-2,2]$。又如，$F^{-1}([-2,-1])=\varnothing$。

关于象和原象的区别请参看图 7。

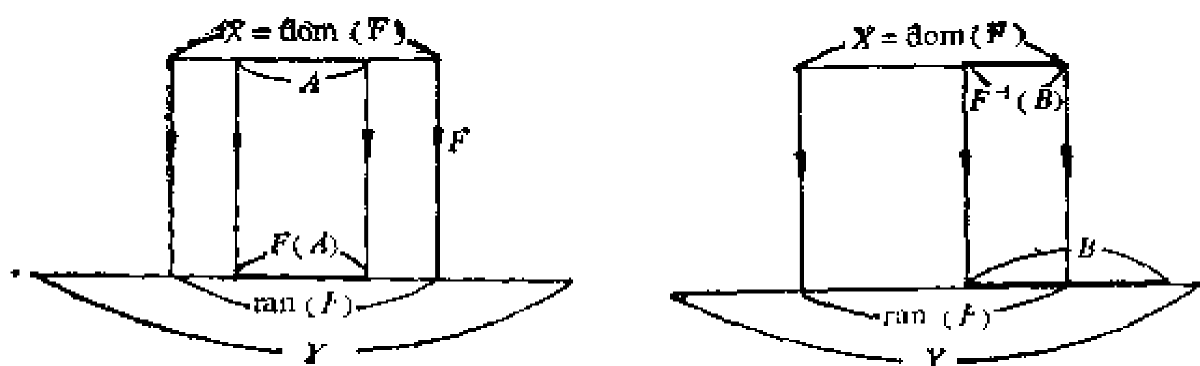


图 7 象和原象的示意图

设 $F: X \to Y$. 以下一些性质是数学中常用的：

I. $A_1 \subset A_2 \subset X \Rightarrow F(A_1) \subset F(A_2)$.

II. $B_1 \subset B_2 \subset Y \Rightarrow F^{-1}(B_1) \subset F^{-1}(B_2)$.

这都是显然的.

III. 设 $A \subset X$. 则 $A \subset F^{-1}(F(A))$. 如 F 是单射，则 $A = F^{-1}(F(A))$.

证 按定义，

$$x \in A \Rightarrow F(x) \in F(A) \Longleftrightarrow x \in F^{-1}(F(A)), \qquad (1)$$

这就证明了定理的第一部分. 应该注意，一般地说，(1)中的单向箭头⇒是不可逆的. 我们知道，$F(x) \in F(A)$ 当且仅当 $\exists \xi \in A(F(x) = F(\xi))$. 在后一公式里，并未保证 ξ 就是原来的 x. 但当 F 是单射时，就有 $x = \xi \in A$. 这就证明了定理的第二部分. ▮

例如，在上例中，设 $A = [-1, 2]$，则 $F(A) = [0, 4]$，但 $F^{-1}(F(A)) = [-2, 2]$. 另一方面，F 的限制 $G = F \restriction (\{0\} \cup \boldsymbol{R}^+)$ 是单叶的. 对于任何 $A \subset \{0\} \cup \boldsymbol{R}^+$ 来说，永远有 $A = G^{-1}(G(A))$.

IV. 设 $B\subset Y$. 则 $F(F^{-1}(B))\subset B$. 如 $F: X\to Y$ 是满射，则 $F(F^{-1}(B))=B$.

证 设 $y\in F(F^{-1}(B))$，则按象的定义，存在某个 $x\in F^{-1}(B)$，使 $y=F(x)$. 又按原象的定义，由 $x\in F^{-1}(B)$ 推出：存在某个 $\eta\in B$，使 $\eta=F(x)$. 于是 $y=\eta\in B$. 这就证明了定理的第一部分. 以下设 $F: X\to Y$ 是满射，这时 $B\subset Y=\operatorname{ran}(F)$. 于是有

$$y\in B\Rightarrow \exists x\in X(y=F(x)) \tag{2}$$

按原象的定义，$x\in F^{-1}(B)$，又按象的定义，$y\in F(F^{-1}(B))$. 这就证明了定理的第二部分. ▮

应该注意，如 $F: X\to Y$ 不是满射，则不能一般保证 (2) 中 x 的存在，推理也就不能继续下去了.

在上例中，设 $B=[-1,4]$，则 $F^{-1}(B)=[-2,2]$，但 $F(F^{-1}(B))=[0,4]$. 另一方面，$F: \boldsymbol{R}\to\{0\}\cup\boldsymbol{R}^+$ 是满射. 对于任何 $B\subset\{0\}\cup\boldsymbol{R}^+$，永远有 $F(F^{-1}(B))=B$.

V. 设 $A\subset X$ 且 $B\subset X$. 则

$$F(A\cup B)=F(A)\cup F(B).$$

证 $y\in F(A\cup B)\Longleftrightarrow \exists x(x\in A\cup B\wedge y=F(x))$

$$\Longleftrightarrow \exists x((x\in A\vee x\in B)\wedge y=F(x))$$
$$\Longleftrightarrow \exists x((x\in A\wedge y=F(x))\vee(x\in B\wedge y=F(x)))$$
$$\Longleftrightarrow y\in F(A)\vee y\in F(B)$$
$$\Longleftrightarrow y\in F(A)\cup F(B).$$ ▮

VI. 设 $A\subset X$ 且 $B\subset X$. 则

$$F(A\cap B)\subset F(A)\cap F(B).$$

如 F 是单射，则 $F(A\cap B)=F(A)\cap F(B)$.

证 $y\in F(A\cap B)$

$$\Longleftrightarrow \exists x(x \in A \cap B \wedge y = F(x))$$
$$\Longleftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \in B \wedge y = F(x))$$
$$\Longleftrightarrow \exists x((x \in A \wedge y = F(x)) \wedge (x \in B \wedge y = F(x)))$$
$$\Longrightarrow (y \in F(A)) \wedge (y \in F(B))$$
$$\Longleftrightarrow y \in F(A) \cap F(B) \ .$$

这就证明了定理的第一部分. 注意,一般地说,以上推导中的单向箭头$\Rightarrow$是不可逆的. 因为,由 $(y \in F(A)) \wedge (y \in F(B))$ 只能推出

$$(\exists x(x \in A \wedge y = F(x))) \wedge (\exists \xi(\xi \in B \wedge y = F(\xi)))$$

其中的 x 同 ξ 不一定重合. 但如 F 是单射, 则 $x = \xi$, 这时单向箭头$\Rightarrow$就变成双向的$\Longleftrightarrow$了. 定理的第二部分得证. ▌

VII. 设 $A \subset X$ 且 $B \subset X$. 则

$$F(A) - F(B) \subset F(A - B).$$

如 F 是单射,则 $F(A) - F(B) = F(A - B)$.

证明留给读者.

VIII. 设 $C \subset Y$ 且 $D \subset Y$. 则

$$F^{-1}(C \cup D) = F^{-1}(C) \cup F^{-1}(D).$$

证明留给读者.

IX. 设 $C \subset Y$ 且 $D \subset Y$. 则

$$F^{-1}(C \cap D) = F^{-1}(C) \cap F^{-1}(D).$$

证. $x \in F^{-1}(C \cap D)$

$$\Longleftrightarrow \exists y(y \in C \cap D \wedge y = F(x))$$
$$\Longleftrightarrow \exists y(y \in C \wedge y \in D \wedge y = F(x))$$
$$\Longleftrightarrow \exists y((y \in C \wedge y = F(x)) \wedge (y \in D \wedge y = F(x)))$$
$$\Longrightarrow x \in F^{-1}(C) \wedge x \in F^{-1}(D)$$

$$\Longleftrightarrow x\in F^{-1}(C)\cap F^{-1}(D).$$

以上推导中的单向箭头⇒是可逆的. 这是因为

$$x\in F^{-1}(C)\wedge x\in F^{-1}(D)$$

$$\Longrightarrow(\exists y(y\in C\wedge y=F(x)))\wedge(\exists\eta(\eta\in D\wedge\eta=F(x)))$$

$$\Longrightarrow\exists y((y\in C\wedge y=F(x))\wedge(y\in D\wedge y=F(x))).$$

定理全部得证. ▌

X. 设 $C\subset Y$ 且 $D\subset Y$. 则

$$F^{-1}(C-D)=F^{-1}(C)-F^{-1}(D).$$

证明留给读者.

§8 反函数与复合函数

我们知道,函数是一种特殊类型的关系,它被要求第二坐标的单值性. 按照 §5 的定义,一个关系永远有逆关系. 但是,作为殊特类型关系的函数,它们的逆却不一定是函数. 例如,$F=\{(x,x^2)\mid x\in\boldsymbol{R}\}$ 是一个函数. 但它的逆关系 $F^{-1}=\{(x^2,x)\mid x\in\boldsymbol{R}\}$ 就不是一个函数.

【引理】 对于函数 F, 当且仅当 F 是单叶时, F^{-1} 是函数.

证 F 是单叶的,指的是

$$(x,y)\in F\wedge(\xi,y)\in F\Rightarrow x=\xi,$$

这等于说,

$$(y,x)\in F^{-1}\wedge(y,\xi)\in F^{-1}\Rightarrow x=\xi,$$

这等于说 F^{-1} 是个函数. ▌

【定义】 对于函数 F, 当且仅当 F^{-1} 是函数,即 F 是单叶的,说 F^{-1} 是 F 的反函数.

【注 1】　单叶函数 F 是它的反函数 F^{-1} 的反函数。

这是因为，按 §5，定理 4，

$$(F^{-1})^{-1}=F,$$

并且 F 本来是函数。 ▌

【注 2】　单叶函数 F 的反函数 F^{-1} 是单叶的。

这是因为，F^{-1} 的逆 F 本来是函数。

【注 3】　设 F 是单叶函数．则

$$\forall x\in \mathrm{dom}(F)(F^{-1}(F(x))=x),$$

$$\forall y\in \mathrm{ran}(F)(F(F^{-1}(y))=y).$$

我们只证第一个命题．事实上，对于任何的 $x\in \mathrm{dom}(F)$，$(x, F(x))\in F$。故按关系之逆的定义，$(F(x), x)\in F^{-1}$。 ▌

【定理 8】　若 $F: X\to Y$ 是双射，则 F^{-1} 是从 Y 到 X 上的双射。

证　由 §5 的注，

$$\mathrm{dom}(F^{-1})=\mathrm{ran}(F)=Y,\ \mathrm{ran}(F^{-1})=\mathrm{dom}(F)=X,$$

故 F^{-1} 是从 Y 到 X 上的满射。又由注 2，F^{-1} 是单射。 ▌

在此情况下，也称反函数 F^{-1} 为 F 的逆映射。

例如，设

$$F=\left\{(x, y)\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\times[-1, 1]\,\middle|\, y=\sin x\right\}.$$

则 F 是从 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 到 $[-1, 1]$ 上的双射。同时，

$$F^{-1}=\left\{(y, x)\in[-1, 1]\times\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\,\middle|\, y=\sin x\right\},$$

且 F^{-1} 是从 $[-1, 1]$ 到 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的双射，通常记 $F^{-1}(y)=\arcsin y$。

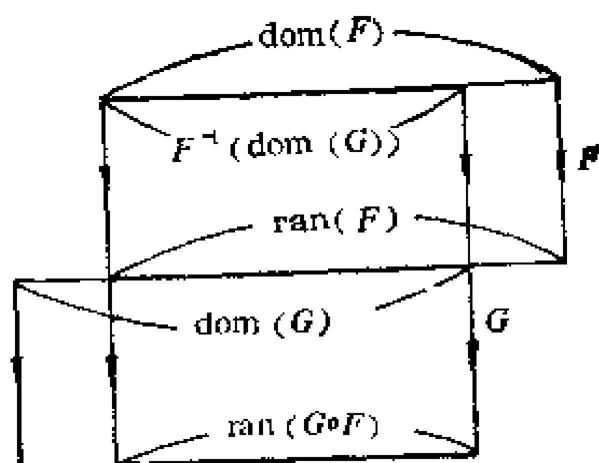


图8 函数复合的示意图

以下谈论复合函数. 设 F, G 是函数, 即都是具有第二坐标单值性的特殊类型的关系. 那么,关系的复合 $G\circ F$ 当然是个关系. 问题是,它还是个函数吗? 以下引理做出肯定的答复.

【引理】 设 F, G 是函数,则 $G\circ F$ 是函数,其定义域为 $F^{-1}(\mathrm{dom}(G))$, 且对这定义域上任何 x,

$$(G\circ F)(x)=G(F(x)).$$

(参看图 8).

证 1) 我们证明 $G\circ F$ 具有第二坐标单值性,那么它就是函数了. 设 $(x, z)\in G\circ F$ 且 $(x, \zeta)\in G\circ F$. 按关系的复合的定义,我们有

$$(\exists y((x, y)\in F\wedge(y, z)\in G))\wedge(\exists\eta((x, \eta)\in F\wedge(\eta, \zeta)\in G)).$$

因 F 是函数,故 $y=\eta$. 又因 G 是函数,故 $z=\zeta$.

2) 我们证明 $\mathrm{dom}(G\circ F)=F^{-1}(\mathrm{dom}(G))$. 事实上,由于 F, G 和 $G\circ F$ 都是函数,我们有

$$x\in\mathrm{dom}(G\circ F)$$

$$\Longleftrightarrow \exists z(z = (G\circ F)(x)) \tag{1}$$

$$\Longleftrightarrow \exists z\exists y(y = F(x) \wedge z = G(y))^{①} \tag{2}$$

$$\Longleftrightarrow \exists y(y \in \mathrm{dom}(G) \wedge y = F(x))$$

$$\Longleftrightarrow x \in F^{-1}(\mathrm{dom}(G)).$$

由公式(2)，有 $z = G(F(x))$。与(1)合看，得到

$$(G\circ F)(x) = G(F(x)).$$

▌

有时，也把函数 F 和 G 的复合 $G\circ F$ 叫做复合函数。

注意，在以上的引理中，函数 F 和 G 是完全任意的。特别是，如 $\mathrm{ran}(F)\cap\mathrm{dom}(G) = \varnothing$，即 $F^{-1}(\mathrm{dom}(G)) = \varnothing$ 时，$G\circ F = \varnothing$。

【注 4】 既然函数的复合只是关系的复合的特殊情况，所以，有关关系复合的一般性质在此仍然成立。设 F，G，H 是函数，则

$$(H\circ G)\circ F = H\circ(G\circ F).$$

【注 5】 设 F，G 是单叶函数(即 F^{-1}，G^{-1} 是函数)，则 $G\circ F$ 的反函数

$$(G\circ F)^{-1} = F^{-1}\circ G^{-1}.$$

这里，需先证明 $G\circ F$ 的单叶性。这是显然的。

【注 6】 若 $F: X\to Y$ 是双射，则

$$F^{-1}\circ F = I_X,\quad F\circ F^{-1} = I_Y,$$

其中 I_X，I_Y 分别是 X，Y 上的恒等函数(§6，例 1)。

请读者自己验证。

最后，我们举一个与单叶函数和复合函数都有关系的一个例子。

---

① 括号中就是 $(x, y)\in F\wedge(y, z)\in G$.

【例】 我们知道，一般来说，一个函数不一定是单叶的．以下提供一个处理方法，对于任一函数，可以保留它的一切值，得到一个新的单叶函数．设给定函数 $F: X\to Y$． 如下定义关系 R：

$$x_1 R x_2 \Longleftrightarrow F(x_1) = F(x_2).$$

不难验证 R 是等价关系．每一等价类 $[x]_R$ 中诸元素 x 的函数值 $F(x)$ 都相同，而且属于不同等价类的元素具有不同的函数值．这样，函数 $\hat{F}: X/R\to Y$，其中

$$\hat{F}([x]_R) = F(x),$$

就是一个单射．$\hat{F}$ 叫做 F 的单叶化．比较 § 6，例 4 的自然映射 φ，我们有

$$F = \hat{F}\circ\varphi.$$

这就是说，任何映射 $F: X\to Y$ 可以分解为自然映射 $\varphi: X\to X/R$ 与单叶化 $\hat{F}: X/R\to Y$ 的复合．

§9 族

在微积分中，人们常用 (S_n) (其中 n 遍历一切自然数且每个 S_n 是实数)记一个实数列．其实，一个实数列 (S_n) 不过是从自然数集 $\boldsymbol{N}$ 到实数集 $\boldsymbol{R}$ 内的一个函数 $S: \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{R}$，它的项 S_n 不过是在 $n\in\boldsymbol{N}$ 的函数值 $S(n)$． 这样的记法在不少其他场合也被采用．

设给定集合 I 及定义在 I 上的函数 A．对于每个 $i\in I$，记 $A_i = A(i)$，并用 $(A_i)_{i\in I}$ 记这函数，且称之为一个族．如 A 是从 I 到集合 M 内的函数，为了表明函数 A 的值都在 M 的里边，记这函数为族的形式时，可写 $(A_i)_{i\in I}$(每个 $A_i\in M$)．另

外，我们称 I 为标集，称每个 $i \in I$ 为标号，称 A_i 为这个族的项．如此说来，一个族就是一个函数，标集就是它的定义域，项就是函数值，这里不过是引入一些新的记号和新的名称而已．例如，把自然数集 $\boldsymbol{N}$ 看作实数集 $\boldsymbol{R}$ 的子集．对于函数 $S: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$，其中 $S(n) = n^2$，如用族的形式来记，就是 $(n^2)_{n\in \boldsymbol{N}}$．又如，对于函数 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$，其中 $f(x) = \sin x$，如用族的形式来记，就是 $(\sin x)_{x\in \boldsymbol{R}}$．用族的形式记函数并非徒劳无益，下面会看到，引入族的记法在某些场合给我们带来方便．

以下讨论集族和集组的关系．如每个 A_i 是集合，就叫 $(A_i)_{i\in I}$ 为一个集族．设给定一个集族 $(A_i)_{i\in I}$，那么，它的值域 $\operatorname{ran}(A_i)_{i\in I}$ 就是一个集组，它恰好包含一切的项 A_i①．另一方面，设给定一个集组 M，我们总可选择一个标集 I 和一个定义在 I 上的函数 A，从而形成一个族 $(A_i)_{i\in I}$，使 $\operatorname{ran}(A_i)_{i\in I} = M$，即，使 $A: I \to M$ 是满射．例如，可取 M 本身做标集，并设 A 是 M 上的恒等函数，即对于每个 $i \in M$，$A_i = i$．这样得到的集族 $(A_i)_{i\in M}$ 就是所需要的．总之，集族和集组可以互相代替，使这集族的值域恰好等于这集组，这就是说，集族和集组可以互相代替，使集族的一切项恰好是集组的一切元素．

集族的项的并集

设给定集族 $(A_i)_{i\in I}$，并记 $M = \operatorname{ran}(A_i)_{i\in I}$．我们定义

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup(M)$$

① 当然，函数 $(A_i)_{i\in I}$ 不一定单叶，所以它的项可能重复，即虽然 $i \neq j$，也可能 $A_i = A_j$，它们在族 $(A_i)_{i\in I}$ 中是不同的项，而在集组 $\operatorname{ran}(A_i)_{i\in I}$ 中是同一元素．

并称之为集族 $(A_i)_{i\in I}$ 的诸项的并集。由于 $M=\operatorname{ran}(A_i)_{i\in I}$，所以，一方面，对于每个 $i\in I$，$A_i\in M$；另一方面，对于M的每一成员 X，存在至少一个 $i\in I$，使 $A_i=X$。由此可见，

$$x\in\bigcup(M)\Longleftrightarrow\exists X\in M(x\in X)\Longleftrightarrow\exists i\in I(x\in A_i).$$

这样，我们可利用标集和标号把以上定义写成

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x\mid\exists i\in I(x\in A_i)\},$$

就是说，一个集族的诸项的并集由一切至少属于它的一项的元素组成。

在第一章，§6，我们曾定义了一般集组的成员的并集(正是上面定义集族的项的并集时所根据的)，但关于运算律，我们只建立了两个集合的并集交换律和关于三个集合的并集结合律，没有对一般集组来谈论这两个算律。对于一般的集组，并集交换律没有意义①。至于结合律，用第一章，§6中集组的记号表达是不方便的。以下考虑集族的项的并集的结合律：设给定集族 $(A_i)_{i\in I}$。把标集 I 用某种方式分组，即设

$$I=\bigcup_{k\in K}J_k,$$

其中J 是从新标集 K 到 $\mathscr{P}(I)$ 内的一个映射(即每个 $J_k\subset I$)。这样，族 $(A_i)_{i\in I}$ 的项也相应地分了组。先对每个 $k\in K$，求并集 $\bigcup_{i\in J_k}A_i$，再对一切的 k，求这些并集的并集 $\bigcup_{k\in K}\left(\bigcup_{i\in J_k}A_i\right)$。一般结合律说的是最后的结果同原来的并集

① 但对于集族，并集的交换律指的是：设 f 是标集 I 到自己上面的双射，并对每个 $i\in I$，记 $B_i=A_{f(i)}$，那么，$\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}B_i$。这不难由本节并集定义推出。

$\bigcup_{i\in I} A_i$ 重合：

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in K}\left(\bigcup_{i\in J_k} A_i\right).$$

事实上，

$$x\in\bigcup_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \exists i(i\in I\wedge x\in A_i)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists i\exists k(k\in K\wedge i\in J_k\wedge x\in A_i)$$

$$\left(I=\bigcup_{k\in K} J_k\right)$$

$$\Longleftrightarrow \exists k\left(k\in K\wedge x\in \bigcup_{i\in J_k} A_i\right)$$

$$\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{k\in K}\left(\bigcup_{i\in J_k} A_i\right).$$ ▮

集族的项的交集

设给定集族 $(A_i)_{i\in I}$，其中 $I\neq\varnothing$①，并记

$$M = \mathrm{ran}(A_i)_{i\in I}.$$

如下定义 $(A_i)_{i\in I}$ 诸项的交集：

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap(M).$$

同并集的情形类似，定义可以写成如下形式：

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x\mid\forall i\in I(x\in A_i)\},$$

就是说，一个标集非空的集族的诸项的交集由一切同时属于它的每一项的元素组成。

设族 $(J_k)_{k\in K}$ 的意义如上。关于交集的一般结合律如下：对于 $I\neq\varnothing$，$K\neq\varnothing$，且每个 $J_k\neq\varnothing$，

① 这意味着 $\mathrm{ran}(A_i)_{i\in I}\neq\varnothing$．看§6，注2．

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{k\in K}\left(\bigcap_{i\in I_k} A_i\right).$$

请读者自己验证.

一般的第一,第二分配律如下(参看第一章,§7 的末尾):

$$A\cap\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A\cap B_i).$$

对于 $I\neq\varnothing$, $A\cup\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A\cup B_i)$.

我们只证第一分配律. 事实上,

$$x\in A\cap\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)\Longleftrightarrow x\in A\wedge x\in\bigcup_{i\in I} B_i$$

$$\Longleftrightarrow x\in A\wedge\exists i(i\in I\wedge x\in B_i)\Longleftrightarrow\exists i(i\in I\wedge x\in A\wedge x\in B_i)$$

$$\Longleftrightarrow\exists i(i\in I\wedge x\in A\cap B_i)$$

$$\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}(A\cap B_i).$$ ∎

一般的笛卡尔积

在 §2,我们定义了两个集合 A 与 B 的笛卡尔积. 值得注意的是, A, B 是有先后顺序的($A\times B$ 中 A, B 一般不可交换). 严格说来,"A 与 B 的笛卡尔积"应说成"序偶 (A, B) 的第一,二坐标的笛卡尔积". 一个序偶可以看作是含有两项的族(例如,可取 $\{0, 1\}$ 做标集). 现在,把笛卡尔积的概念推广,使其适用于任意的集族.

设给定集族 $(A_i)_{i\in I}$. 对于每个 $i\in I$, 从每个 A_i 中任取一元素 a_i, 这样的元素往往有很多. 现在考虑一切可能的族 $(a_i)_{i\in I}$, 看它们能否组成一个集合? 我们知道, 每个 $(a_i)_{i\in I}$ 是定义在 I 上的函数,它的值 a_i 取在 $A_i\subset\bigcup_{i\in I} A_i$内,

所以，每个函数 $(a_i)_{i\in I}\in\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^I$（看 § 6 规定的记号 Y^X）。后者就是一切 $(a_i)_{i\in I}$ 的包容集。可见一切可能的族 $(a_i)_{i\in I}$ 形成一个集合。

【定义】 对于集族 $(A_i)_{i\in I}$，记

$$\bigtimes_{i\in I}A_i=\{(a_i)_{i\in I}\mid\forall i\in I(a_i\in A_i)\},$$

并称之为集族 $(A_i)_{i\in I}$ 的项的笛卡尔积。

如果把序偶看成含有两项的族，§ 2 的两个集合的笛卡尔积可看做是这里的特殊情况。

【例 1】 如每个 A_i 等于同一集合 $\mathscr{A}$，我们记

$$\bigtimes_{i\in I}A_i=\bigtimes_{i\in I}\mathscr{A}.$$

这个笛卡尔积就是从 I 到 $\mathscr{A}$ 的一切函数的集合，即

$$\bigtimes_{i\in I}\mathscr{A}=\mathscr{A}^I.$$

【例 2】 设给定集族 $(A_i)_{i\in I}$ 及 $J\subset I$。$(A_i)_{i\in I}$ 被 J 的限制可以记作 $(A_i)_{i\in J}$。考虑映射

$$F:\bigtimes_{i\in I}A_i\to\bigtimes_{i\in J}A_i,$$

其中 $F((a_i)_{i\in I})$ 规定为 $(a_i)_{i\in I}$ 被 J 的限制，即

$$F((a_i)_{i\in I})=(a_i)_{i\in J}.$$

这映射叫做 $\bigtimes_{i\in I}A_i$ 到 $\bigtimes_{i\in J}A_i$ 上的投影函数。例如，设 F 是三维空间 $\bigtimes_{i\in\{0,1,2\}}\boldsymbol{R}$（通常记作 $\boldsymbol{R}^3$）到二维空间 $\bigtimes_{i\in\{0,1\}}\boldsymbol{R}$（通常记作 $\boldsymbol{R}^2$）的投影函数，那么，对于 $(x_0,x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^3$，$F(x_0,$

$x_I, x_1) = (x_0, x_1)$①．§6，例2的投影函数可以看作是这里一般投影函数的特殊情形．

关于象和原象的几个一般性质

以下把§7的性质V，VI，VIII，IX推广到一般的并集和交集上去：

设 $F: X \to Y$ 且 $A: I \to \mathscr{P}(X)$（即每个 $A_i \subset X$），则：

V′．$F\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} F(A_i)$.

VI′．如 $I \neq \varnothing$，则 $F\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} F(A_i)$．当 F 单叶时，$F\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} F(A_i)$.

设 $F: X \to Y$ 且 $C: I \to \mathscr{P}(Y)$（即每个 $C_i \subset Y$），则：

VIII′．$F^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} C_i\right) = \bigcup_{i \in I} F^{-1}(C_i)$.

IX′．如 $I \neq \varnothing$，则 $F^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} C_i\right) = \bigcap_{i \in I} F^{-1}(C_i)$.

请读者自己证明这四个性质．

习 题 二

1．如果试图仿效 Kuratowski 关于序偶的定义，如下定义序叁：

$$(x, y, z)^* = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}.$$

试举反例，使 $(x, y, z)^* = (u, v, w)^*$，但 $x = u$，$y = v$，$z = w$ 不全成立．这说明以上定义不成功．以下是定义序叁的一种方式：

---

① (x_0, x_1, x_2) 是族 $\{(0, x_0), (1, x_1), (2, x_2)\}$ 的简写，(x_0, x_1) 是族 $\{(0, x_0), (1, x_1)\}$ 的简写．

$$(x, y, z) = ((x, y), z).$$

证明，$(x, y, z) = (u, v, w) \Leftrightarrow x = u \wedge y = v \wedge z = w$.

2. 证明不存在包含一切序偶的集合.

3. 证明

1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

3) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

4. 证明:

1) $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing$.

2) $A \times B = A \times C \wedge A \neq \varnothing \Longrightarrow B = C$.

5. 证明:

1) $A \subset C \wedge B \subset D \Longrightarrow A \times B \subset C \times D$.

2) 设 A, B 非空，则

$$A \times B \subset C \times D \Longrightarrow A \subset C \wedge B \subset D.$$

6. 证明 $A \times A = B \times B \Longrightarrow A = B$.

7. 设给定集合 A 和集组 M. 证明:

1) $C = \{A \times \mu | \mu \in M\}$ 是集合.　2) $A \times \bigcup(M) = \bigcup(C)$.

8. 设给定集合 A, B. 证明:

1) $C = \{\{x\} \times B | x \in A\}$ 是集合. 2) $A \times B = \bigcup(C)$.

9. 列出集合 $X = \{a, b, c\}$ 与集合 $Y = \{s\}$ 的一切关系.

10. 列出集合 2(按习题一，3 的定义)中的一切关系.

11. 设 S 是一个关系. 证明

$$\bigcup(\bigcup(S)) = \mathrm{dom}(S) \cup \mathrm{ran}(S).$$

[提示: 只要证明: $\alpha \in \bigcup(\bigcup(S)) \Leftrightarrow \exists (x,y) \in S(\alpha = x \vee \alpha = y)$ 就可以了.]

12. 设 Π 是集合 A 的一个分类. 如下定义 A 中的关系 R: 当且仅当 x, y 属于 Π 的同一类时，说 xRy. 证明 R 是 A 中一个等价关系.

13. 设 R 是 X 中的关系. 证明:

1) R是自反的 $\Longleftrightarrow I_X \subset R$($I_X$是$X$中的等于关系)。

2) R是对称的$\Longleftrightarrow R^{-1} = R$。

3) R是传递的$\Longleftrightarrow R \circ R \subset R$。

4) R传递且自反$\Longrightarrow R \circ R = R$。逆命题对吗?

14. 设 S, T是关系。证明:

1) $(S \cup T)^{-1} = S^{-1} \cup T^{-1}$。 2) $(S \cap T)^{-1} = S^{-1} \cap T^{-1}$。

15. 设R是X中的关系。证明:

1) $R \cup R^{-1}$ 是包容R的最小对称关系。

2) $R \cap R^{-1}$ 是包容于R的最大对称关系。

[提示: 关于1),可先证 $R \cup R^{-1}$是X中的对称关系。再设M是X中的一切包容R的对称关系的集合。并证明$\cap(M) \in M$。最后证明$\cap(M) = R \cup R^{-1}$。]

16. 设关系 $R = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3)\}$. 求 $R \circ R$, R^{-1}。

17. 证明空集$\varnothing$是函数,且是单叶的。

18. 证明映射 $\varnothing$: $\varnothing \longrightarrow \varnothing$ 是满占的。

19. 设 f, g是函数。证明,

$$f \subset g \Leftrightarrow \mathrm{dom}\,(f) \subset \mathrm{dom}\,(g) \wedge \forall x \in \mathrm{dom}\,(f)(f(x) = g(x)).$$

通常称函数g为函数f的延拓。

20. 设f, g是函数。证明:

1) $f \cap g$ 是函数。

2) $f \cup g$ 是函数$\Longleftrightarrow$对于每个 $x \in \mathrm{dom}\,(f) \cap \mathrm{dom}\,(g)$,

$$f(x) = g(x).$$

21. 证明不存在包含一切函数的集合。

22. 集合0, 1, 2, 3按习题一,3的定义。

1) 从0到1内的函数是什么?

2) 有没有从1到0内的函数?

3) 从1到1内的函数是什么?

4）制造一个从 2×3 到 6 上的双射.

23. 明显写出以下的集合:

$$2^3,\ 3^2,\ 2^0,\ 0^2,\ 0^0,\ 1^0,\ 1^1,\ 0^1,\ 2^1,\ 1^2.$$

24. 证明: 如 $Y^X=\varnothing$, 则 $X\neq\varnothing$ 且 $Y=\varnothing$. 这就是说, 如 $X=\varnothing$ 或 $Y\neq\varnothing$, 则永远存在从 X 到 Y 内的映射. [注意,此命题是 § 6, 注 2 的逆. 在证明时,可引用 § 6 的注 1.]

25. 证明: 如 $Y^X=X^Y$, 则 $X=Y$. [提示: 由第 24 题,可设 $Y^X\neq\varnothing$. 这就可取 $f\in Y^X$ 来考虑问题.]

26. 证明: 如存在一个从 X 到 Y 内的非单叶映射, 则 $X\neq\varnothing$ 且 $Y\neq\varnothing$. [提示: 可利用 § 6 的注 1, 注 2 和第 17 题.]

27. 证明;如存在一个从 X 到 Y 内的非满占映射,则 $Y\neq\varnothing$.

28. 证明 § 7 的 I.

29. 证明 § 7 的 II.

30. 证明 § 7 的 VII.

31. 证明 § 7 的 VIII.

32. 证明 § 7 的 X.

33. 设 R 是有单位元的交换环, A 是 R 的一个理想. 如下定义 R 中的关系 S:

$$xSy\Leftrightarrow x-y\in A.$$

证明: 1) S 是 R 中的等价关系.

2) 如下定义商集 R/S 中的加法和乘法:

$$[x]_S+[y]_S=[x+y]_S,\quad [x]_S\cdot[y]_S=[x\cdot y]_S,$$

则和与积同代表 x, y 的选取无关,且 R/S 也是一个有单位元的交换环.

3) 设 $\varphi: R\to R/S$ 是自然映射,则 φ 是从 R 到 R/S 上的同态满射.

34. 制造一个从 $4=3\cup\{3\}=\{0,1,2,3\}$ 到 $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)))$ 上的双射,并写出它的反函数.

35. 设 $f: X\to Y$, 且 $g: Y\to X$. 证明:

1) 如 $g\circ f = I_X$ (X 上的恒等函数),则 f 是单射且 g 是满射.

2) 如 $g\circ f = I_X$ 且 $f\circ g = I_Y$, 则 f, g 都是双射且 $g = f^{-1}$.

36. 设 $h\in X^X$. 证明:

$$\forall f, g\in X^X(h\circ f = h\circ g \Longrightarrow f = g)\Leftrightarrow h \text{ 是单射.}$$

[提示: 关于$\Longrightarrow$: 设 h 非单射, 即存在 x_1, $x_2\in X$, 使 $x_1\neq x_2$ 但 $h(x_1) = h(x_2)$. 取 f, g 如下: 对于每个 $x\in X$, $f(x) = x_1$, $g(x) = x_2$, 即可得到与题设矛盾的结果.]

37. 设 $h\in X^X$. 证明:

$$\forall f, g\in X^X(f\circ h = g\circ h \Longrightarrow f = g)\Leftrightarrow h \text{ 是满射.}$$

[提示: 关于$\Longrightarrow$: 设 $h\in X^X$ 非满射, 即存在 $x_0\in X$, 使对于任何 $x\in X$, $h(x)\neq x_0$. 可见 $X\neq\varnothing$ 且 $X\neq\{x_0\}$. 于是存在 $x_1\in X$ 且 $x_1\neq x_0$. 取 f, g 如下:

$$\text{对每个 } x\in X,\ f(x) = x_1;\ g(x) = \begin{cases} x_1 & (x\neq x_0) \\ x_0 & (x = x_0) \end{cases},$$

即可得到与题设矛盾的结果.]

38. 设 $F: X\to Y$ 是双射,证明:

1) $F^{-1}\circ F = I_X$. 2) $F\circ F^{-1} = I_Y$.

39. 证明 §9 的集族诸项之交的结合律.

40. 证明 §9 关于集族的并与交的第二分配律.

41. 证明 §9 末尾的性质 V′, VI′, VIII′, IX′.

42. 设 $A_0 = \{a, b\}$, $A_1 = \{x\}$, $A_2 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. 写出集族(作为序偶的集合) $(A_i)_{i\in 3}$ 及笛卡尔积(作为序偶的集合的组) $\underset{i\in 3}{\times} A_i$. (注意: $3=\{0, 1, 2\}$)

43. 设对于每个 $i\in 3$, $A_i = i$. 写出集族 $(A_i)_{i\in 3}$ 及笛卡尔集 $\underset{i\in 3}{\times} A_i$(注意: $0 = \varnothing$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$).

44. 设 P 是定义在 $[0, 1]$ 上的一切实值函数的集合. 试将 P 表示

成笛卡尔积。

45. 设给定集族 $(A_i)_{i\in I}$ 及 $(B_j)_{j\in J}$。证明

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\times\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)=\bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i\times B_j).$$

46. 设 $(G_i,w_i)_{i\in I}$① 是非空群组成的非空族。如下定义 $\underset{i\in I}{\times} G_i$ 中的运算 w：对于任何的 $x=(x_i)_{i\in I}\in\underset{i\in I}{\times} G_i$ 及任何的 $y=(y_i)_{i\in I}\in\underset{i\in I}{\times} G_i$，令

$$xwy=(x_iw_iy_i)_{i\in I}.$$

证明 $\left(\underset{i\in I}{\times} G_i,\ w\right)$ 还是一个群。

① 这里 w_i 表示群 G_i 中的运算。

第三章 自 然 数

§1 引 言

人类从稍有文化的时候开始，就创造了自然数，并成为生活中离不开的观念．人们还对自然数进行运算，并使用一些不加证明的算律．但是，直至上一世纪，没有人认真过问自然数应如何定义，它们所遵循的算律是怎样证明的．从 19 世纪后半叶开始，数学公理化的思想逐渐被数学界所接受．在 1889 年，G. Peano 第一个在理论上对自然数做了严格的处理．他把自然数集作为不定义的概念，但为它设立了一套公理，名叫 Peano 公理①．由这套公理和关于顺序，运算的定义，可以证明自然数的各项基本性质．从此以后，自然数的基础理论严格化了．不过，Peano 并没有给特定的自然数集下定义．这当然算不了 Peano 理论的缺点，因为任何数学系统总有不定义的概念和不加证明的公理，尽管 Peano 系统中没有自然数集的定义，它仍不失其为一个好的数学系统．但是，如想把自然数的理论纳入集合论，那么，就不宜在集合论的公理之外再把 Peano 公理列为公理，这就需要定义自然数集了．在 1921 年，J. von Neumann 第一个在集合论的基础上为自然数集规定定义，我们将在本节及下节来介绍它．

---

① 参看§3．

我们说的自然数指的是0，1，2，3，等等．现在的问题是：1）什么是0，什么是1，2，3？2）什么是一切自然数的集合？关于问题1)，其实早在习题一，3中就已经指明了．现在讲一下那些定义的背景．人类最初对0的认识是"空无所有"．（注意，这说的是自然数0，不是有理数0或实数0.）在小学，对小学生引入0也是这样．那么，用不包含任何元素的集合$\varnothing$来定义0就是很自然的了：定义

$$0=\varnothing.$$

其次，1应是只包含一个元素的集合一单集的抽象．从空集出发，集合$\{\varnothing\}$，$\{\{\varnothing\}\}$，$\{\{\{\varnothing\}\}\}$等等都是单集．那么，找一个最简单的单集定义1好了：

$$1=\{\varnothing\}=\{0\}.$$

再次，2应是偶集（真正的，即$\{a, b\}$中$a\neq b$的)的抽象，由于$\varnothing\neq\{\varnothing\}$，即$0\neq 1$，故可定义

$$2=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=\{0, 1\}.$$

类似地，可以定义

$$3=\{0, 1, 2\}.$$

等等．

关于问题2)：如何定义一切自然数的集合？读者可能认为，既然由$\varnothing$定义0，由0定义1，由0，1定义2，由0，1，2定义3，那么，"以此类推"，就可以"定义"一切自然数，从而得到自然数集了．这样的论断是值得推敲的．当然，由于空集，单集，偶集和叁集都已在第一章有了明确的意义，所以上面关于0，1，2，3的定义是无可非议的．但是，"以此类推"？谁能在有生之年或者在想象得到的若干代之后能够穷尽一切自然数呢？我们的任务是，用明确的集合论语言定义自然数集．

从以上几个具体的自然数的定义我们看到

$$0=\varnothing,$$
$$1=\{0\}=0\cup\{0\},$$
$$2=\{0,1\}=\{0\}\cup\{1\}=1\cup\{1\},$$
$$3=\{0,1,2\}=\{0,1\}\cup\{2\}=2\cup\{2\}.$$

可见，我们需要定义的自然数集应该具有以下性质：1) $\varnothing$ 属于这个集合，2)如果 a 属于这个集合，则 $a\cup\{a\}$ 也属于这个集合.

不过，只有这两条性质还不足以确定自然数集. 例如，除单集 $1=\{0\}$ 外，这两个条件没有排斥同是单集的$\{1\}$于我们的集合之外. 如果 $\{1\}$ 属于我们的集合，而且按照条件 2)，$\{1\}\cup\{\{1\}\}$ 等等也属于我们的集合，这些元素就是多余的了. 所以，在定义自然数集时，除满足条件 1)，2)外，还应抛弃一切多余的元素. 以上就是下节正式定义自然数集的直觉背景.

§2 自然数集

先引入后继者概念：

【定义】 对于集合 a，称 $a\cup\{a\}$ 为 a 的后继者，记作 a^+：

$$a^+=a\cup\{a\}.$$

例如，按上节定义，$0=\varnothing$，$0^+=1$，$1^+=2$，$2^+=3$. 顺此下去，还可定义 $3^+=4$，$4^+=5$，等等. 又如

$$\{1\}^+=\{1,\{1\}\},\{1\}^{++}=\{1,\{1\},\{1,\{1\}\}\}.$$

我们注意到，在后继者的定义中，集合 a 既是其后继者

a^+ 的子集：$a \subset a^+$，还是它的元素：$a \in a^+$．这似乎是一件不愉快的事情．因为，包容关系 $\subset$ 同属于关系 $\in$ 是两个不同的概念，并且在 $A \subset B$ 时，人们把 A，B 看成"同层次"的，在 $A \in B$ 时，人们把 A，B 看成是"不同层次"的．而现在，对于 a 与其后继者 a^+ 来说，包容关系与属于关系同时成立！不过，这种不愉快是可以忍受的，我们的定义并未导致任何逻辑上的矛盾，同时，a 既包容于 a^+ 又属于 a^+ 这个双重性对于讨论自然数以至一般的序数（见第六章）反而带来方便．

以下定理说明空集在后继关系中的地位：

【定理 1】 $0 = \varnothing$ 不是任何集合的后继者，即

$$\forall a(a^+ \neq \varnothing).$$

证 $a \in a^+$． ▌

以下引入归纳集的概念：

【定义】 对于集合 A，当且仅当

1) $\varnothing = 0$ 是 A 的元素：$\varnothing \in A$，

2) 若 a 是 A 的元素，则 a^+ 是 A 的元素，即

$$\forall a(a \in A \Longrightarrow a^+ \in A),$$

说 A 是一个归纳集．

下面，我们做一些非正式的说明．在微积分中，人们说，"当正整数 n 趋向无穷时，$\frac{1}{n}$ 以 0 为极限"．这指的是：对于任何的正实数 ε，存在正整数 n_0，对于任何的 $n > n_0$，$\frac{1}{n} < \varepsilon$．这里的 n_0 和 n 都是普通的正整数，在极限的定义中并未出现实在的无穷．上面所说的"无穷"是"潜在的无穷"：无论 $\varepsilon > 0$ 怎样小，总有足够大的 n_0，使对于比 n_0 更大的 n，

$\frac{1}{n}<\varepsilon$.

如上所述，如果A是归纳集，那么，由$0=\varnothing$属于A就可推知$0^+=1$属于A，由1属于A就可推知$1^+=2$属于A，这样的推演可以无休止地进行下去．如果承认这样的集合A是存在的(看下面的无穷公理)，那么，就不止把"无穷"看作这个无休止的过程，而是"一下子"承认A是一个实在的集合，它含有"无穷"多个元素．这样的"无穷"就是"实在的无穷"了．

至少从古希腊的亚里斯多德时代和我国的战国时代（二者几乎同时)开始，人们接受了"潜在的无穷"的观念．由于在人们的物质生活中，直接感触到的都是"有限"的事物，并且，如果承认具有"无穷多"元素的集合是"实体"，也往往能得出与传统观念相违背的结论，例如全体的元素可以同一部分的元素"一样多"．这样，直到 Cantor 创立集合论以前，数学界普遍拒绝"实在的无穷"的观念． Cantor 集合理论中根本观点之一就是承认具有"无穷多"元素的集合是存在的，并作为实体研究了它们．正因如此，Cantor 的理论在当时受到一部分数学家的非难甚至激烈的攻击．我们认为，"实在的无穷"是人类思维高度抽象的结果，而近几十年数学发展的历史也说明了 Cantor 理论的高贵价值．我们承认具有"无穷多"元素的集合是存在的：

> **无穷公理**
>
> 至少存在一个归纳集.

这个公理实质上承认了一种特殊类型的"无穷集"的存在，我们说"实质上"，因为"无穷集"的正式定义还要等到下

一章方始给出。

上节说过，只用归纳集的两个条件还不足以确定自然数集。还需甩掉多余的元素，留下一个不能再小的归纳集。这就是说，我们需要一个归纳集，它是一切归纳集的共同部分。

【引理】 存在唯一的集合 ω，恰好包含一切属于每个归纳集的元素。

证 按无穷公理，任取一个存在的归纳集 A，可取它做包容集。另外，取条件 $C(n)$ 为

$$“n\in \text{每个归纳集}”.$$

根据子集公理，存在唯一的集合

$$\begin{aligned}\omega&=\{n\in A\,|\,n\in \text{每个归纳集}\}\\&=\{n\,|\,n\in \text{每个归纳集}\}.\end{aligned}$$

∎

【定义】 称集合

$$\omega=\{n\,|\,n\in \text{每个归纳集}\}$$

为自然数集，它的元素为自然数。

例如，前面已经知道，0，1，2 属于一切归纳集，所以它们都是自然数。用列举的办法确定自然数集是永远不可能的。我们的定义则是用关于元素的条件“一下子”确定了自然数集，任何符合条件的元素(本身也是集合)都是自然数，不符合条件的都不是。

在本书中，我们把 ω 作为自然数集的专用记号。由定义可知，ω 是每个归纳集的子集①。然而，它本身是归纳集吗？以下定理给出答复：

【定理 2】 ω 是归纳集。

① 注意，我们不说 ω 是一切归纳集的交集，因为一切归纳集形成不了集合。

证 1) $\varnothing$属于每个归纳集，故按定义，$\varnothing \in \omega$.

2) 对于任何的 n，

$$n \in \omega \Longrightarrow n \in \text{每个归纳集}$$
$$\Longrightarrow n^+ \in \text{每个归纳集}$$
$$\Longrightarrow n^+ \in \omega.$$
∎

把引理同定理 2 结合起来，可以看出：1) ω 是一切归纳集的子集，2) ω 自己也是归纳集. 在这样的意义下，可以说，ω 是最小的归纳集(在包容意义下). 这样，就不可能有比 ω 再小的归纳集了. 这就是说，如果 A 是归纳集，而且 $A \subset \omega$，则 $A = \omega$.

【定理 3】 (归纳原理) 设 $A \subset \omega$，且

i) $0 \in A$，

ii) $\forall n \in \omega(n \in A \Longrightarrow n^+ \in A)$，

则 $A = \omega$.

证 现在 $A \subset \omega$. 但按条件i)，ii)，A 是归纳集，故 $\omega \subset A$. 最后得到 $A = \omega$. ∎

归纳原理是常用的数学归纳法的根据. 这就是:

设 $C(n)$ 是关于 $n \in \omega$ 的一个条件. 如果

i) 对于 $n = 0$，$C(n)$ 成立，

ii) $C(n)$ 成立 $\Rightarrow C(n^+)$ 成立，

则对于一切的 $n \in \omega$，$C(n)$ 成立.

这只要在定理 3 中取

$$A = \{n \in \omega \mid C(n)\}$$

就可以了.

我们知道，对于任一自然数 n，总存在自然数 n^+，为 n 的后继者. 以下定理说明另一方面的问题:

【定理 4】 对于任何自然数 $n \neq 0$，存在一个自然数 m，使 $m^+ = n$。

证 用归纳原理. 设

$$A = \{0\} \cup \{n \in \omega \mid \exists m \in \omega(m^+ = n)\}.$$

我们有

i) $0 \in A$。

ii) 设 $n \in A$. 对于 n^+，取 $m = n$，则 $m^+ = n^+$，可见 $n^+ \in A$。

由归纳原理，$A = \omega$。 所以，如 $n \in \omega$ 且 $n \neq 0$，则 n 属于 A 的第二个子集，即存在 $m \in \omega$，使 $m^+ = n$。 ▮

对于 $n \neq 0$，称使 $m^+ = n$ 的 m 为 n 的先行者，记 $m = n^-$。定理 4 表明任何非零的自然数都有先行者. 至于 0 没有先行者这一事实则早在定理 1 中就已确立了.

以下引入一个与自然数以及一般的序数(见第六章)有关的概念.

【定义】 设给定集合 B. 当且仅当 B 的任何元素的元素仍为 B 的元素，即

$$\forall x \forall y(y \in x \land x \in B \Longrightarrow y \in B),$$

就说 B 是一个传递集.

【定理 5】 每个自然数 n 是传递集.

证 用归纳原理. 设 A 由一切成为传递集的自然数组成:

$$A = \{n \in \omega \mid \forall x \forall y(y \in x \land x \in n \Longrightarrow y \in n)\}.$$

则

i) $0 = \varnothing \in A$. 这是因为 $x \in \varnothing$ 永不成立，故关于 A 的元素 n 的条件对于 $n = 0$ 成立.

ii) 设 $n\in A$，即设对于任何的 x, y,

$$y\in x\wedge x\in n\Longrightarrow y\in n. \tag{1}$$

现在看 n^+. 设 $y\in x$ 且 $x\in n^+$，即设

$$y\in x\wedge x\in n\cup\{n\}.$$

于是，或者 $y\in x\wedge x\in n$，则由(1)推出 $y\in n$；或者 $y\in x\wedge x=n$，同样有 $y\in n$. 由于 $n\subset n^+$，故 $y\in n^+$. 可见 n^+ 满足 A 的元素的条件，故 $n^+\in A$.

按归纳原理，$A=\omega$. 定理得证. ▮

【注 1】 设 n 是自然数，x 是 n 的元素. 由定理 5，如 $y\in x$，则 $y\in n$. 可见 x 又是 n 的子集. 用文字表达，这就是：

自然数的元素必同时是它的子集.

例如，$0\in 1$，同时 $0\subset 1$；$0, 1\in 2$，同时 $0, 1\subset 2$. 要注意，以上命题之逆不能一般成立，例如 $3\subset 3$，但 $3\notin 3$；$\{0, 2\}\subset 3$，但 $\{0, 2\}\notin 3$.

按照我们的经验，一个集合不是自己的元素应是一条普遍的原则(参看第一章，§4). 这个原则可以从另一条更普遍的公理推出(参看习题六，13). 对于特殊类型的集合自然数，这是可以根据前面的结果证明的.

【推论】 对于任何的自然数 n，$n\notin n$.

证 设 $A=\{n\in\omega\mid n\notin n\}$.

则 i) $0=\varnothing\in A$.

ii) 设 $n\in A$，即设 $n\notin n$. 看 n^+. 如 $n^+\in n^+$，即设 $n^+\in n\cup\{n\}$. 或者 $n^+\in n$，此时因 $n\in n^+$，故由定理 5，得 $n\in n$；或者 $n^+=n$，此时由假设 $n^+\in n^+$，同样得 $n\in n$. 这都与假设 $n\notin n$ 矛盾. 所以 $n^+\notin n^+$，故 $n^+\in A$.

按归纳原理，$A = \omega$. ∎

由以上推论可以得出：

自然数的元素必是它的真子集.

事实上，由注1，对于自然数 n 的元素 x 来说，$x \subset n$. 但 $x \neq n$，否则就与推论矛盾. ∎

【定理 6】 自然数集 ω 是传递集.

证 设 $A = \{n \in \omega \mid \forall x(x \in n \Longrightarrow x \in \omega)\}$.

则 i) $0 \in A$. 这是因为 $x \in 0$ 永远不对.

ii) 设 $n \in A$，即设对于任何的 $x \in n$，$x \in \omega$. 看 n^+. 设 $x \in n^+$，即设 $x \in n \cup \{n\}$. 或者 $x \in n$，则由假设，$x \in \omega$；或者 $x = n$，同样有 $x \in \omega$.

按归纳原理，$A = \omega$. 这就是说，ω 的任何元素 n 的元素 x 仍是 ω 的元素，故 ω 是传递集. ∎

定理 6 又可说成：自然数的元素是自然数.

把以上的结果综合起来，自然数的元素都是些什么就是很清楚的了：

【注 2】 自然数的元素仍是自然数，而且是它的真子集.

例如，$3 = \{0, 1, 2\}$ 的元素 0，1，2 都是自然数，它们还都是 3 的真子集.

§3 Peano 公理

在 §1 我们讲过，自然数的基础理论的严格化从 Peano 设立公理开始. 以下对这套公理作一介绍.

自然数集 ω（它的元素叫做自然数）和数 0 作为不定义的原始概念，但满足以下公理：

【Peano 公理】 1) $0\in\omega$.

2) 每个 $n\in\omega$ 有唯一的后继者 $n^+\in\omega$ (映射$(\quad)^+$: $\omega\to\omega$ 也不定义，但具有以下性质).

3) 0 不是任何 $n\in\omega$ 的后继者，即

$$\forall n\in\omega(n^+\neq 0).$$

4) 不同的自然数有不同的后继者，即

$$\forall n,m\in\omega(n\neq m\Longrightarrow n^+\neq m^+).$$

5) ω 满足归纳原理.

作为公理，在 Peano 提出它们时是不加证明的. 然而，在我们的理论系统里，我们已经定义 ω 是最小的归纳集，定义 0 为空集 $\varnothing$，并且，在一般的后继者的定义下，$n^+=n\cup\{n\}$. 这样，Peano 公理的各条都可证明. 性质 1)和 2)合在一起就是定理 2. 性质 3) 已包括在定理 1 中. 性质 5) 就是定理 3. 以下证明剩下的性质 4):

设 $n,m\in\omega$ 且 $n\neq m$，我们证明 $n^+\neq m^+$. 事实上，如 $n^+=m^+$，即 $n\cup\{n\}=m\cup\{m\}$，那么就有: 1) $n\in m\cup\{m\}$ 且 2) $m\in n\cup\{n\}$. 由 1)推出 $n\in m$ 或 $n=m$，由 2)推出 $m\in n$ 或 $m=n$. 按假设，$n=m$ 不成立，所以由 1)和 2)推出 $n\in m$ 且 $m\in n$. 由定理 5，自然数 n 是传递集，故 $n\in n$. 这就与定理 5 的推论相矛盾. 可见 $n^+\neq m^+$. ∎

顺便指出，性质 4) 等于说，每个非零自然数的先行者(定理 4 证明了它的存在)是唯一的.

§4 自然数集中的顺序

在本节，将定义自然数集中的小于关系. 按照以前规定，

$$0=\varnothing,1=\{0\},2=\{0,1\},3=\{0,1,2\}$$ 等等.

所以 $0\in 1$, $0,1\in 2$, $0,1,2\in 3$, 等等. 看来, 对于自然数, 把属于关系定义为小于关系是适当的.

在正式定义以前, 我们做些理论上的准备工作.

【引理 1】 对于任何的 $n, m\in\omega$,

$$n\in m \Longleftrightarrow n^+\in m^+.$$

证 1) "$\Rightarrow$"部分. 任取 $n\in\omega$, 设

$$A_n=\{m\in\omega \mid n\in m\Longrightarrow n^+\in m^+\},$$

并对 m 进行归纳. 如能证明 $A_n=\omega$, 则对于任何的 $n\in\omega$ 和任何的 $m\in\omega$, 都能由 $n\in m$ 推出 $n^+\in m^+$. 事实上,

i) 对于 $m=0=\varnothing$, $n\in m$ 永不成立, 故 $0\in A_n$.

ii) 设 $m\in A_n$, 即设

$$n\in m\Longrightarrow n^+\in m^+. \tag{1}$$

看 m^+. 设 $n\in m^+$, 即设 $n\in m\cup\{m\}$. 那么, 或者 $n\in m$, 此时由(1), $n^+\in m^+\subset(m^+)^+$, 故 $n^+\in(m^+)^+$; 或者 $n=m$, 此时 $n^+=m^+\in(m^+)^+$. 在两种情况中, 都推出 $n^+\in(m^+)^+$, 可见 $m^+\in A_n$.

按归纳原理, $A_n=\omega$.

2) "$\Leftarrow$"部分. 设 $n^+\in m^+$, 即设 $n^+\in m\cup\{m\}$. 于是, 或者 $n^+\in m$, 此时, 因 $n\in n^+$, 故由定理 5, $n\in m$; 或者 $n^+=m$, 同样有 $n\in m$. ■

【引理 2】 对于任何的 $n, m\in\omega$, 以下三种情形至多有一成立:

$$n=m,\quad n\in m,\quad m\in n.$$

证 如 $n=m$ 且 $n\in m$, 则 $m\in m$; 如 $n=m$ 且 $m\in n$, 则 $n\in n$; 如 $n\in m$ 且 $m\in n$, 则由定理 5, 同样有 $n\in n$. 这都

与定理 5 的推论矛盾. 可见三种情形两两不相容. ▮

【引理 3】 对于任何的 n, $m \in \omega$, 以下三种情形至少有一成立:

$$n = m, n \in m, m \in n.$$

证 1) 先对 $m = 0$ 的情况进行证明. 设

$$B = \{n \in \omega | n = 0 \vee 0 \in n\},$$

以下证明 B 与 ω 重合:

i) $0 \in B$.

ii) 设 $n \in B$, 即 $n = 0$, $0 \in n$ 有一成立. 看 n^+. 因 $n^+ \neq 0$, 故需证 $0 \in n^+$. 如 $n = 0$, 则因 $n \in n^+$, 故 $0 \in n^+$; 如 $0 \in n$, 则由定理 5, 同样得 $0 \in n^+$. 可见 $n^+ \in B$.

按归纳原理, $B = \omega$. 即对于任何 $n \in \omega$, $n = 0$, $0 \in n$ 至少有一成立.

2) 任取 $n \in \omega$, 设

$$A_n = \{m \in \omega | n = m \vee n \in m \vee m \in n\},$$

并对 m 进行归纳:

i) $0 \in A_n$. 这已在 1) 中得证.

ii) 设 $m \in A_n$, 那么,或者 $n = m$, 此时 $n \in m^+$ 成立;或者 $n \in m$, 此时同样 $n \in m^+$ 成立;或者 $m \in n$, 此时由引理 1, $m^+ \in n^+$, 即 $m^+ \in n \cup \{n\}$. 于是,或者 $m^+ \in n$, 或者 $m^+ = n$. 总之,在各种可能下,都推出 $m^+ \in A_n$.

按归纳原理, $A_n = \omega$. 由于 $n \in \omega$ 是任意的,所以对于任意的 n, $m \in \omega$, 引理所述三种情形至少有一成立. ▮

【引理 4】 对于任何的 n, $m \in \omega$, n 是 m 的元素,当且仅当 n 是 m 的真子集, 即

$$\forall n, m \in \omega (n \in m \Longleftrightarrow n \subsetneqq m).$$

证 “$\Rightarrow$”已证(看 § 2，注 2)．以下证“$\Leftarrow$”部分．设 $n\subset m$ 且 $n\neq m$．按引理 2，3，由 $n\neq m$ 推出，情形

1) $n\in m$， 2) $m\in n$

恰好有一成立．哪一个呢？按 § 2，注 1，由 2)将推出 $m\subset n$，这连同假设 $n\subset m$，就推出 $n=m$，与假设 $n\neq m$ 矛盾．可见 1) 必成立． ∎

【定义】 对于自然数 n，m，当且仅当 $n\in m$ (即 $n\subsetneqq m$) 时，说 n 小于 m，记以

$$n<m.①$$

在这定义下，可写

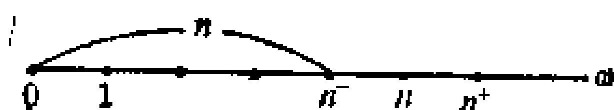
$$\forall n\in\omega\forall i\in\omega(i\in n\Longleftrightarrow i<n).$$

按定理 6，$n\in\omega\wedge i\in n$ 蕴涵着 $i\in\omega$，所以，以上公式与公式

$$\forall n\in\omega(\forall i(i\in n\Longleftrightarrow i\in\omega\wedge i<n))$$

等价．这就是说：

【注】 任一自然数 n 是由小于它的一切自然数组成的一个集合，即



每个自然数 n 既表示为直线上的点子，又是这点子前面一切点子的集合。

图 9

$$n=\{i\in\omega|i<n\},②$$

① 这就是说，ω 中的小于关系是：$\{(n,m)\in\omega\times\omega|n\in m\}$.

② 这等式只是为了直观上的便利，其实，$i<n$ 就是 $i\in n$，它算不上集合 n 的元素 i 的条件(看第一章，§ 3)，按规定，n 不应出现在条件中．

(参看图 9). 例如,

$$1=\{0\},\ 2=\{0,1\},\ 3=\{0,1,2\},100=\{0,1,\cdots,99\}.$$

自然数集 ω 中的 $<$ 关系具有以下两个基本性质:

【定理 7】 (三歧性) 对于任何的 $n, m\in\omega$, 以下三种情形恰好有一成立:

$$n=m,\ n<m,\ m<n.$$

这就是引理 2, 3.

【定理 8】 (传递性)对于任何的 $n, m, l\in\omega$,

$$n<m\wedge m<l\Longrightarrow n<l.$$

这可由定理 5 推出.

最后,引入几个记号.我们把小于关系 $<$ 的逆叫做大于关系,记作 $>$,即当且仅当 $n<m$ 时,记 $m>n$. 我们把小于关系与等于关系的并集记作 $\leqslant$ (读作"小于或等于"),即当且仅当 $n<m\vee n=m$ 时, 记 $n\leqslant m$. 关系 $\leqslant$ 的逆记作 $\geqslant$. 值得注意的是, $n\leqslant m$ 与 $n\subset m$ 是一致的.

§5 最小数原理

我们将在本节建立关于自然数集 ω 中的 $<$ 关系的一个重要特性,这个特性是整数集, 有理数集和实数集所不具备的. 为此,先证以下引理:

【引理】 如果自然数 n 小于 m, 那么 n 的后继者 n^+ 不能超过 m, 即只能 $n^+\leqslant m$.

证 设 $n<m$, 即设 $n\in m$. 由上节的引理 1,

$$n^+\in m^+=m\cup\{m\}.$$

或者 $n^+\in m$, 即 $n^+<m$, 或者 $n^+=m$. 总之 $n^+\leqslant m$. ∎

由引理不难推出自然数集的不同于在其基础上建立的有理数集，实数集(它们的任何两个元素之间还有其他元素)的特性：在任何自然数 n 与其后继者 n^+ 之间不存在其他自然数。

下面定义最小数．设 $A\subset\omega$．当且仅当存在 $n_0\in A$，使对于任何 $n\in A$，$n_0\leqslant n$，就说 n_0 是 A 的最小数．应该注意，如 $A\subset\omega$ 有最小数，则最小数必唯一．事实上，如 n_0，n_1 都是 A 的最小数，则由定义，$n_0\in A$ 且 $n_1\in A$，从而 $n_0\leqslant n_1$ 且 $n_1\leqslant n_0$。故 $n_0=n_1$。 ▮

【定理 9】 (最小数原理) 任何由自然数组成的非空集合必有最小数。

证 设 $A\subset\omega$ 且 $A\neq\varnothing$． 以下分几步证明 A 有最小数：

1) 设 T 是不超过 A 的任何元素的自然数的全体：

$$T=\{m\in\omega\,|\,\forall n\in A(m\leqslant n)\}.$$

现在证明 $T\neq\omega$。事实上，因 $A\neq\varnothing$，故可取 $n_0\in A$。于是 $n_0^+>n_0$，可见 $n_0^+\in\omega$ 但 $n_0^+\notin T$。

2) 以下证明存在 $m_0\in T$，使 $m_0^+\notin T$．事实上，如果不是这样，即如对于任何的 $m\in T$，总有 $m^+\in T$，则又因 $0\in T$，于是由归纳原理，$T=\omega$，与 1)中结果矛盾．

3) 最后证明 m_0 就是 A 的最小数．事实上，因 $m_0\in T$，故按 T 的定义，

$$\forall n\in A(m_0\leqslant n). \tag{1}$$

可见只要证明 $m_0\in A$ 就可以了．用反证法：如 $m_0\notin A$，则排除了(1)中等号成立的可能：

$$\forall n\in A(m_0<n),$$

由引理，

$$\forall n\in A(m_0^+\leqslant n),$$

于是 m_0^+ 符合T的元素的条件,故 $m_0^+\in T$，这就与 2) 中 m_0 的定义矛盾. ∎

§6 递推原理

先看微积分中一个例题. 设c是一个正实数. 如下"定义"一个数列 $u: \omega\to \boldsymbol{R}^+$:

1) $u(0)=\sqrt{c}$, 2) $u(n^+)=\sqrt{c+u(n)}$.

这里,由 1),首项 $u(0)$ 已确定为$\sqrt{c}$; 由 2),次项 $u(1)$ 确定为 $\sqrt{c+\sqrt{c}}$; 再由 2), 再次项 $u(2)$ 也确定为

$$\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}},$$

"以此类推",就似乎可以认为整个数列已经定义了. 这样判断的根据是不充分的! 我们只写出了数列的前三项, 即使写得再多,也只能写出"有限多"项, 整个数列的项是写不完的. "以此类推"不能代替正式推证.

本节将要建立的递推原理可以保证 1) 和 2) 确能定义一个数列. 为了使概念一般化,再考察一下公式 2). 实际上我们给出了一个函数 $f:\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$, 其中

$$f(x)=\sqrt{c+x},$$

而 2) 指的是 $u(n^+)=f(u(n))$. 这种形式的公式通常叫做递推公式.

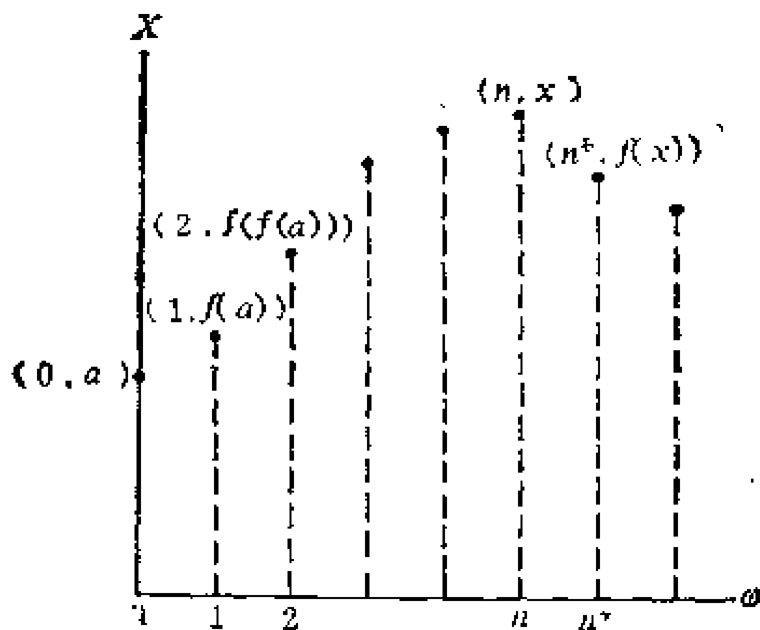
【定理 10】 (递推原理) 设给定非空集合X 和它的一个元素 a, 并给定一个函数 $f: X\to X$. 那么,存在唯一的函

数 $u: \omega \to X$，满足：

1) $u(0)=a$，　2) $u(n^+)=f(u(n))$.

【分析】 现在只看 u 的存在性，我们要证明的是，存在一个函数 $u: \omega \to X$，满足：

1) $(0, a) \in u$，2) $\forall n \in \omega \forall x \in X((n, x) \in u \Rightarrow (n^+, f(x)) \in u)$，（参看图 10）. 我们用间接的方法证明函数 u 的

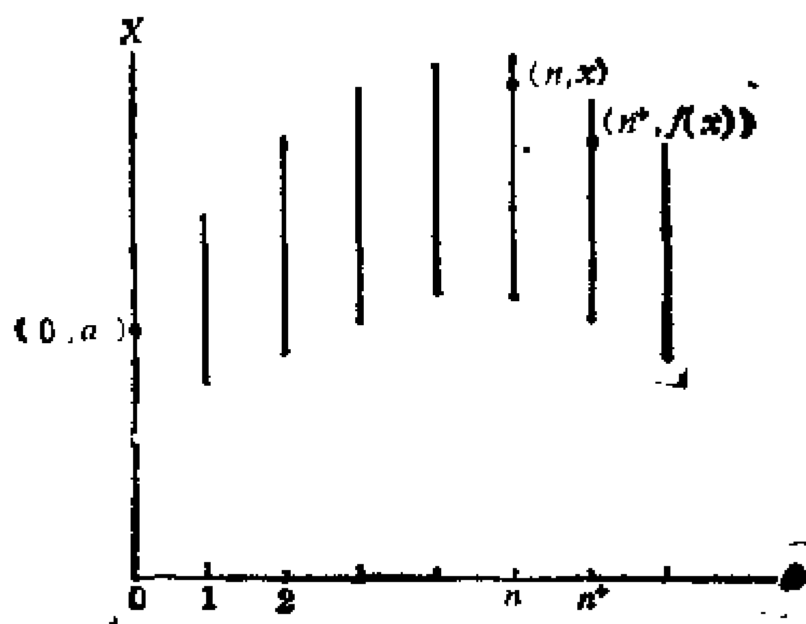


图中的点子组成 u

图　10

存在性. 暂不考虑满足 1)、2) 的函数 u，而先考虑满足 1)、2) 的关系 U（参看图 11）. 这样的关系肯定存在，因为至少 $\omega \times X$ 是其中的一个（最大的一个）. 不妨设想，这样的关系中最小的一个，即一切这样关系的交集应是我们要寻求的函数 u.

【定理的证明】 满足 1)、2)的函数 u 的唯一性不难用归纳原理证明. 我们只证函数 u 的存在性. 先看满足条件



图中的线条组成U

图 11

1) $(0, a)\in U$,

2) $\forall n\in \omega\forall x\in X((n, x)\in U \Rightarrow (n^+, f(x))\in U)$

的关系$U\subset\omega\times X$. 设M是一切这样的U组成的集合:

$$M=\{U\in \mathscr{P}(\omega\times X)|U \text{ 满足 } 1), 2)\}.$$

那么,不难看出 $\omega\times X\in M$, 可见$M\neq\varnothing$. 设

$$u=\bigcap(M).$$

以下证明u就是所求的函数:

A) 作为关系,u满足1), 2). 事实上,

1) 由 $(0, a)$ 属于每个U推知 $(0, a)\in u$;

2) 由 $(n, x)\in u$ 推知 (n, x) 属于每个 U, 从而推知$(n^+, f(x))$属于每个 U, 故$(n^+, f(x))\in u$.

B) $\operatorname{dom}(u)=\omega$ 且 $\operatorname{ran}(u)\subset X$.

第一等式可用归纳原理证明. 第二等式由 $u \subset \omega \times X$ 推知.

C) 关系 u 是函数. 这只要证实 u 的元素 (n, x) 关于第二坐标 x 的单值性就可以了. 用 $C(n)$ 记条件

$$\forall x \forall y((n, x) \in u \wedge (n, y) \in u \Rightarrow x = y),$$

并设 $T = \{n \in \omega \mid C(n)\}$.

我们用归纳原理证明 T 与 ω 重合:

i) $0 \in T$. 事实上,如 $0 \notin T$, 即 $C(0)$ 不成立,那么,由 A), 已有 $a \in X$, 使 $(0, a) \in u$, 故必有 $b \in X$, $b \neq a$, 使 $(0, b) \in u$. 现在把多余的 $(0, b)$ 减掉,设

$$u' = u - \{(0, b)\}.$$

因 $a \neq b$, 故 $(0, a) \neq (0, b)$, 可见 $(0, a)$ 没有被减掉,即 $(0, a) \in u'$, 于是 u' 满足 1). 此外,设 $(n, x) \in u'$, 则 $(n, x) \in u$. 由 A), $(n^+, f(x)) \in u$. 但 $n^+ \neq 0$ (定理 1), 故 $(n^+, f(x)) \neq (0, b)$, 所以 $(n^+, f(x))$ 没有从 u 中减掉,即 $(n^+, f(x)) \in u'$, 于是 u' 满足 2). 这样就有 $u' \in M$. 这是说,存在 u 的真子集 $u' \in M$, 就同 $u = \cap(M)$ 矛盾了. 最后断定, $0 \notin T$ 不对.

ii) 如 $n \in T$, 则 $n^+ \in T$. 事实上,由 $n \in T$ 可知, 如 $(n, x) \in u$, 则这 $x \in X$ 就是唯一的. 又因 u 满足 2), 故 $(n^+, f(x)) \in u$. 以下证明, 如 $n^+ \notin T$, 就会导致矛盾. 事实上, 如果这样,即存在 $y \in X$, $y \neq f(x)$, 使 $(n^+, y) \in u$. 象 i) 中那样,设

$$u'' = u - \{(n^+, y)\}.$$

因 $n^+ \neq 0$, 故 $(n^+, y) \neq (0, a)$, 可见 $(0, a) \in u''$, 即 u'' 满

足 1). 此外,设 $(m, t)\in u''$, 则 $(m, t)\in u$, 且因 u 满足 2), $(m^+, f(t))\in u$. 此时:

如 $m=n$, 则上述唯一的 $x=t$,故 $(m^+, f(t))=(n^+, f(x))$. 但 $y\neq f(x)$, 故 $(n^+, f(x))\neq(n^+, y)$, 可见 $(m^+, f(t))\in u''$.

如 $m\neq n$, 则由 Peano 公理的性质 4), $m^+\neq n^+$,故 $(m^+, f(t))\neq(n^+, y)$, 同样得到 $(m^+, f(t))\in u''$.

可见 u'' 还满足 2). 满足 1), 2) 的 u'' 是集组M的成员,但它又是 u 的真子集,这就与 $u=\bigcap(M)$ 矛盾.

总结 i), ii), 按归纳原理, $T=\omega$. 可见对于任何的 $n\in\omega$, 关系 u 的第二坐标单值性 $C(n)$ 成立,所以 u 是函数. ∎

在此,我们对定理中 u 的存在性的证明做些解释. 有些读者可能认为以下的"证明"简单得多:

"设 $A=\{n\in\omega|u(n)$ 被确定$\}$.那么,(i) 由 1), $u(0)=a$, 故 $0\in A$. (ii) 设 $n\in A$, 即 $u(n)$ 被确定, 则由 2), $u(n^+)=f(u(n))$ 被确定,故 $n^+\in A$. 按归纳原理, $A=\omega$, 即对于一切 $n\in\omega$, $u(n)$ 被确定,从而存在函数 $u: \omega\to X$, 满足 1), 2)."

这证法是错误的,其错误在于,它利用了 1), 2)"证明"满足 1), 2)的函数 u 存在,或者说,它已承认了满足 1), 2)的函数 u 存在,再"证明"它存在. 这当然是通不过的.

为了叙述方便,在已证的递推原理中,称X为取值集, a 为初值, f 为递推函数. 递推原理申明,只要有了取值集 X, 初值 $a\in X$ 和递推函数 $f: X\to X$, 就存在唯一的函数 $u: \omega\to X$, 满足初值条件 1)和递推公式 2). 例如,在本节开始

的例子中，取值集是 $\boldsymbol{R}^+$，初值是 $\sqrt{c}$，递推函数 f: $\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$ 由 $f(x)=\sqrt{c+x}$ 定义．按递推原理可以断定存在唯一的函数 u: $\omega\to\boldsymbol{R}^+$，满足

1) $u(0)=\sqrt{c}$，2) $u(n^+)=\sqrt{c+u(n)}$，

§7 自然数的和·积·幂

作为递推原理的应用，我们在本节定义自然数的和，积，幂．

按照人们做加法的习惯，自然数的加法应满足：对于任何给定的自然数 m，

1) m与0之和是m自己：$m+0=m$；

2) 如果知道了m与自然数n的和 $m+n$，那么，m与n的后继者 n^+ 的和$m+n^+$就等于$m+n$ 的后继者$(m+n)^+$：$m+n^+=(m+n)^+$．

我们利用递推原理证明满足条件1)，2)的运算"+"的唯一存在性．事实上，对于任给的 $m\in\omega$，看条件

1)$_m$ $S_m(0)=m$，2)$_m$ $S_m(n^+)=S_m(n)^+$．

如在递推原理中让取值集为ω，初值为m，递推函数f: $\omega\to\omega$ 由 $f(i)=i^+$ 定义，则由原理，可知存在唯一的函数 S_m: $\omega\to\omega$，满足1)$_m$，2)$_m$．由 $m\in\omega$ 的任意性，这也就唯一确定了一个运算+：$\omega\times\omega\to\omega$，其中 $m+n=S_m(n)$，满足1)，2)． ▮

【定义】 ω中的加法+是 ω 中满足以下条件的唯一运算：对于任何的 n，$m\in\omega$，

1) $m+0=m$, 2) $m+n^+=(m+n)^+$.

$m+n$ 叫做 m 与 n 的和.

【注 1】 由定义直接推出

$$m^+=m+1.$$

【注 2】 用归纳原理可以证明,对于任何的 $n, m\in\omega$,

1)′ $0+n=n$, 2)′ $m^++n=(m+n)^+$.

【注 3】 自然数的加法满足交换律,结合律和消去律,即对于任何的 $n, m, l\in\omega$,

$$m+n=n+m,$$
$$(l+m)+n=l+(m+n),$$
$$m+l=n+l\Rightarrow m=n.$$

读者可用归纳原理证明这些算律. 在证明交换律时, 需引用注 2 的结果.

类似地可以定义自然数的乘法,定义的合理性(即定义的运算的唯一存在性)留给读者自己验证:

【定义】 ω 中的乘法 · 是 ω 中满足以下条件的唯一运算: 对于任何的 $n, m\in\omega$,

1) $m\cdot 0=0$, 2) $m\cdot n^+=m\cdot n+m$.

$m\cdot n$ 叫做 m 与 n 的积.

【注 4】 $m\cdot 1=m$.

【注 5】 对于任何的 $n, m\in\omega$,

1)′ $0\cdot n=0$, 2)′ $m^+\cdot n=m\cdot n+n$.

【注 6】 乘法满足交换律,结合律和消去律, 以及乘法关于加法的分配律:

$$m\cdot n=n\cdot m,$$
$$(l\cdot m)\cdot n=l\cdot(m\cdot n),$$

$$m \cdot l = n \cdot l \wedge l \neq 0 \Rightarrow m = n.$$

$$l \cdot (m + n) = l \cdot m + l \cdot n.$$

最后定义自然数的乘方运算，定义的合理性留给读者验证：

【定义】 ω 中的乘方运算 $F: \omega \times \omega \to \omega$——记 $F(m, n) = m^n$——是 ω 中满足以下条件的唯一运算：对于任何的 $n, m \in \omega$，

1) $m^0 = 1$①，2) $m^{n^+} = m^n \cdot m$.

m^n 叫做 m 的 n 次幂②.

【注 7】 $m^1 = m$. 对于 $n \neq 0$，$0^n = 0$.

【注 8】 指数法则成立：

$$m^{n+l} = m^n \cdot m^l.$$

$$(m \cdot n)^l = m^l \cdot n^l.$$

$$(m^n)^l = m^{n \cdot l}.$$

§8 第二归纳原理·第二递推原理

在 §2 的归纳原理中，除初始条件 i) $0 \in A$ 以外，归纳条件 ii) $\forall n \in \omega (n \in A \Rightarrow n^+ \in A)$ 说的是由任一非零自然数 n^+ 的先行者 $n \in A$ 能推出 $n^+ \in A$. 归纳原理是证明有关自然数的众多性质的有力工具. 但是，有些与自然数有关的性质，例如，任一非 0 非 1 的自然数必能表示为一些质数之积，这性质直接用归纳原理证明它们是困难的. 要证明这些性质，归

① 注意，这里无例外地有 $0^0 = 1$.

② 应区别这里的记号 m^n 与过去的记号 Y^X 中 $X = n$ 且 $Y = m$ 的情形，后者指从集合 n 到集合 m 内的一切映射的集合.

纳假定 ii) 需要加强为：对于任一自然数来说，由一切小于它的自然数（不止它的先行者）属于A能推出这自然数属于A. 这样加强了归纳假定的归纳原理就是：

【定理 11】（第二归纳原理）①设 $A\subset\omega$ 满足以下条件：对于任何的 $n\in\omega$,

任何小于n的自然数属于$A \Rightarrow n\in A$,

那么 $A=\omega$.

证 假定 $A\neq\omega$, 则 $\omega-A\neq\varnothing$, 按最小数原理(定理 9), $\omega-A$ 有最小数 n_0. 于是对于任何的 $m<n_0$, $m\in A$. 按归纳假设, $n_0\in A$. 这就与 $n_0\in\omega-A$ 矛盾. ∎

以下对定理做一点说明. 在§2的归纳原理中，有初始假定 i) $0\in A$. 在现在的第二归纳原理中，没有明显提出初始假定. 其实，由于不存在小于0的自然数，所以，“小于0的自然数属于 A” 永远是对的. 按照现在的归纳假定，就得出 $0\in A$. 这样，初始假定 $0\in A$ 就没有必要另外提出来了.

以下证明上面提出的自然数的性质：任一非0非1的自然数能分解为质数之积②. 设

$$A=\{0,1\}\cup\{n\in\omega-\{0,1\}\mid n\text{能分解为质数之积}\}.$$

对于任一非0非1的 n, 假定一切小于n的非零自然数都属于 A, 即都能分解为质数之积. 如n是质数，则对于n，命题当然成立. 如 $n=m\cdot l$, 其中 $1<m<n$, $1<l<n$, 则由假定，m和l都能分解成质数之积，于是它们的乘积n也就能分解成质数之积了，故 $n\in A$. 按第二归纳原理，$A=\omega$. 可见任一非0非1的自然数都能分解成质数之积. ∎

① 为了区别，也称§2的归纳原理为第一归纳原理.

② 关于多于两个的自然数的积，参看第六章§10.

以下讨论递推原理，在§6的递推原理中，除初始条件1) $u(0)=a$ 外，递推公式2) $u(n+1)=f(u(n))$ 说的是通过函数 f，序列 $(u(n))_{n\in\omega}$ 的第 $n+1$ 项 $u(n+1)$ 能由它的前一项 $u(n)$ 确定．利用递推原理可以判断众多的序列的递推定义的合理性，§6的例子就是递推原理的一个应用． 不过，在不少的数学问题中，序列 $(u(n))_{n\in\omega}$ 的第 n 项 $u(n)$ $(n>0)$ 往往不只由它的前一项 $u(n^-)$ 确定，而要由它前面一些项确定．例如，看以下的微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y''+\alpha y'+\beta y=0 \qquad (\alpha,\beta\in \boldsymbol{R} \text{ 是常数}) \\ y(0)=1 \\ y'(0)=1. \end{cases}$$

用待定系数法求它的幂级数解 $y=\sum\limits_{n\in\omega}a_nx^n$，得到：$a_0=1$，$a_1=1$，且

$$a_n=-\frac{\alpha(n-1)a_{n-1}+\beta a_{n-2}①}{n(n-1)} \qquad (n\geqslant 2).$$

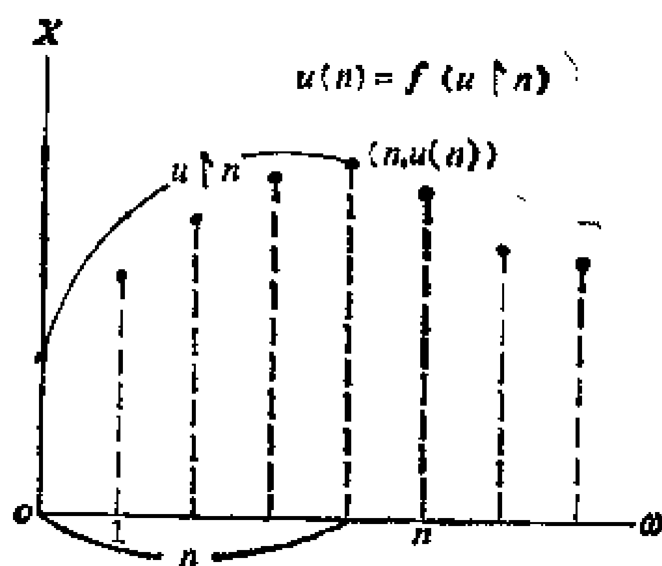
这里，a_n 就是由它前面的两项 a_{n-1}，a_{n-2} 及 n 确定的．要想判断这个数列 $(a_n)_{n\in\omega}$ 的存在，需要一个加强递推条件的递推原理．

设给定集合 X．我们希望得到从 ω 到 X 内的函数 u，其中 u 在 $n\in\omega$ 的值 $u(n)$ 由 u 在小于 n 的自然数上的值所确定．我们知道，$n=\{i\in\omega\,|\,i<n\}$(§4的注)，所以，如果 $u(n)$ 能由 $u\upharpoonright n$ 确定：

$$u(n)=f(u\upharpoonright n),$$

那么，这样的函数 u 就会满足我们的希望(参看图12)． 这里

① $n-1$ 指的是 n 的先行者，$n-2$ 指的是 $n-1$ 的先行者．



图中的点子组成 u.

图 12

的递推函数 f 不是直接定义在 X 上的，它应该是这样的函数，对于从任何的 $n\in\omega$ 到 X 内的任何函数 $t^{(n)}$，f 在 X 内有确定的值. 所以，f 的定义域应是对于一切 $n\in\omega$，一切函数 $t^{(n)}$: $n\to X$ 所组成的集合：

$$S=\{t^{(n)}\mid n\in\omega\wedge t^{(n)}:n\to X\}.$$

【定理 12】 (第二递推原理)① 设给定集合 X，并设集合 S 如上定义. 又设给定函数 f: $S\to X$. 那么，存在唯一的函数 u: $\omega\to X$，使对于每个 $n\in\omega$，

$$u(n)=f(u\restriction n).$$

证 唯一性不难用第二归纳原理推出. 我们只证存在性，如果能够证明存在函数 u: $\omega\to X$，使得

$$\forall n\in\omega\forall t^{(n)}\in S(t^{(n)}\subset u\Rightarrow(n,f(t^{(n)}))\in u),$$

① 为了区别，也称 § 6 的递推原理为第一递推原理.

那么，取 $t^{(n)}=u\upharpoonright n$，就可看出 u 是所求的函数。

证明同定理 10 的证明类似。暂不考虑满足要求的函数，而先考虑满足要求的关系 U，即考虑这样的关系 $U\subset\omega\times X$，满足

$$\forall n\in\omega\forall t^{(n)}\in S(t^{(n)}\subset U\Rightarrow(n,f(t^{(n)}))\in U). \qquad (1)$$

设M是一切这样的关系U组成的集合。因 $\omega\times X\in M$，故 $M\neq\varnothing$。设

$$u=\bigcap(M).$$

我们证明 u 是从 ω 到 X 内的满足(1)的函数。

A) 关系 u 满足 (1)。这是因为，

$$t^{(n)}\subset u\Rightarrow t^{(n)}\subset\text{每个}U\in M\Rightarrow(n,f(t^{(n)}))\in\text{每个}U\in M$$
$$\Rightarrow(n,f(t^{(n)}))\in u.$$

B) u 是从 ω 到 X 内的函数。我们用第二归纳原理证明。用 $C(n)$ 表示条件：

"存在唯一的 $x\in X$，使 $(n,x)\in u$"，

并设

$$T=\{n\in\omega\,|\,C(n)\}.$$

任取 $n\in\omega$，假定一切小于n 的 i 属于 T，这就是说，对于每个 $i<n$，存在唯一的 $x_i\in X$，使 $(i,x_i)\in u$。那么，

$$t^{(n)}=\{(i,x_i)\,|\,i<n\}$$

就是从 n 到 X 内的函数，且 $t^{(n)}\subset u$。按 A) 中已证的结果，我们有 $(n,f(t^{(n)}))\in u$。以下证明这里的第二坐标是唯一的。如果不是这样，即存在 $y\in X$，$y\neq f(t^{(n)})$，使$(n,y)\in u$。像定理 10 的证明一样，从 u 把多余的 (n,y) 减掉，记

$$u'=u-\{(n,y)\}.$$

以下证明 u' 仍满足(1)。事实上，对于任何的 $m\in\omega$，设 $s^{(m)}$

是从 m 到 X 内的函数且 $s^{(m)}\subset u'$. 则 $s^{(m)}\subset u$, 从而 $(m, f(s^{(m)}))\in u$. 此时:

或者 $m=n$, 则由归纳假定中关于第二坐标的唯一性, $s^{(m)}=t^{(n)}$, 故 $(m, f(s^{(m)}))=(n, f(t^{(n)}))$. 但 $f(t^{(n)})\neq y$, 故 $(m, f(s^{(m)}))\neq(n, y)$. 可见 $(m, f(s^{(m)}))$ 没有从 u 中减掉, 故, $(m, f(s^{(m)}))\in u'$.

或者 $m\neq n$, 则 $(m, f(s^{(m)}))\neq(n, y)$, 同样有 $(m, f(s^{(m)}))\in u'$.

总之, u' 满足(1), 即 $u'\in M$. 但 u' 是 u 的真子集, 这就同 $u=\bigcap(M)$ 矛盾. 引出的矛盾证明了使 $(n, x)\in u$ 的 $x=f(t^{(n)})$ 的唯一性, 故 $n\in T$. 按第二归纳原理, $T=\omega$. 这就是说, 对于任何的 $n\in\omega$, 存在唯一的 $x\in X$, 使 $(n, x)\in u$, 从而得到结论: u 是从 ω 到 X 内的函数. ▮

为了叙述方便, 在已证的第二递推原理中, 称 X 为取值集, f 为递推函数. 原理申明: 只要有了取值集 X 和递推函数 $f: S\to X$, 就存在唯一的函数 $u: \omega\to X$, 满足递推公式 $u(n)=f(u\upharpoonright n)$.

以下做两点说明: 1) 与定理 10 不同, 定理 12 没有明显提到初始值. 其实, 从 0 到 X 的函数 $t^{(0)}$ 唯一地是空集 $\varnothing$(第二章, §6, 注 1), 所以 $u(0)=f(\varnothing)$ 就是初始值, 它包含在递推函数 f 的定义里. 2) 函数 u 的限制 $u\upharpoonright n$ 可以写成序列的形式 $(u_i)_{i<n}$. 这样, 定理 12 的递推公式可以写成

$$u_n=f((u_i)_{i<n}).$$

这更直观地说明序列 $(u_n)_{n\in\omega}$ 的第 n 项 u_n 是由它前面的项确定的. 这种形式有时使用起来更方便些. 此外, 把递推函数 f 的定义域写成 $S=\{(t_i)_{i<n}\mid n\in\omega\wedge 每个\ t_i\in X\}$ 有时也方

便些.

例如,看前面提到的微分方程初值问题. 我们证明,存在唯一的数列 $(a_n)_{n\in\omega}$, 满足

$a_0=1$, $a_1=1$, 对于 $n\geqslant 2$,

$$a_n=-\frac{\alpha(n-1)a_{n-1}+\beta a_{n-2}}{n(n-1)}.$$

这里,取值集 $X=\boldsymbol{R}$. 递推函数的定义域是

$$S=\{(t_i)_{i<n}\mid n\in\omega\wedge \text{每 } t_i\in\boldsymbol{R}\}.$$

需要找出适当的递推函数: 设 $f: S\to\boldsymbol{R}$ 如下定义:

$$f(\varnothing)=1,\ f((t_i)_{i<1})=1,$$

对于 $n\geqslant 2$, $f((t_i)_{i<n})=-\dfrac{\alpha(n-1)t_{n-1}+\beta t_{n-2}}{n(n-1)}$①. 则由第二递推原理,知数列 $(a_n)_{n\in\omega}$ 唯一存在,满足

$$a_0=f(\varnothing)=1,\ a_1=f((a_i)_{i<1})=1,$$

对于 $n\geqslant 2$, $a_n=f((a_i)_{i<n})=-\dfrac{\alpha(n-1)a_{n-1}+\beta a_{n-2}}{n(n-1)}$. ∎

§9　实　数　系

在已证的 Peano 公理(§3)的基础上,可以建立有理数系 $\boldsymbol{Q}$ 和实数系 $\boldsymbol{R}$, 并证明它们的算术性质和分析性质. 关于这些,读者可参阅,例如,作者的另一本书《数系——从自然数到复数》(1986 北京师大出版社). 在本书的后面, 我们将认为 $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ 和它们的性质是已知的.

---

① 这里把自然数集 ω 看成实数集 $\boldsymbol{R}$ 的子集.

习 题 三

1. $\{2\}^+=?$ $\bigcup(\{2\}^+)=?$

2. 证明：对于任何集合 A，$\bigcup(\{A\}^+)=A^+$.

3. 证明：对于任何自然数 n，$\bigcup(n^+)=n$. 可以把 n 换成任意的集合吗？举出反例.

4. 设 $(X_i)_{i\in\omega}$ 是集合序列. 定义

$$\lim\sup(X_i)_{i\in\omega}=\bigcap_{j\in\omega}\bigcup_{\substack{i\in\omega\\ i\geqslant j}}X_i,$$

并称之为 $(X_i)_{i\in\omega}$ 的上极限. 定义

$$\lim\inf(X_i)_{i\in\omega}=\bigcup_{j\in\omega}\bigcap_{\substack{i\in\omega\\ i\geqslant j}}X_i,$$

并称之为 $(X_i)_{i\in\omega}$ 的下极限. 证明

$$\lim\inf(X_i)_{i\in\omega}\subset\lim\sup(X_i)_{i\in\omega}.$$

其次，当且仅当

$$\lim\inf(X_i)_{i\in\omega}=\lim\sup(X_i)_{i\in\omega},$$

说这等式两端的共同集合为 $(X_i)_{i\in\omega}$ 的极限，记以 $\lim(X_i)_{i\in\omega}$. 例如，对以下的区间序列，求它们的极限或上，下极限：

i) $([0,i])_{i\in\omega}$. ii) $\left(\left[0,\frac{1}{i^+}\right]\right)_{i\in\omega}$

iii) $(X_i)_{i\in\omega}$：其中当 i 是偶数时，$X_i=[0,1]$，当 i 是奇数时，$X_i=[-1,0]$.

iv) $(X_i)_{i\in\omega}$：其中当 i 是偶数时，$X_i=[0,i]$，当 i 是奇数时，$X_i=\left[0,\frac{1}{i}\right]$.

5. 设 $(A_i)_{i\in\omega}$ 是集合序列. 当且仅当对于任何的 $i\in\omega$，$A_i\subset A_{i^+}$ ($A_{i^+}\subset A_i$)，说 $(A_i)_{i\in\omega}$ 是递增(递减)的. 证明，对于递增(递减)序列，当 $i\leqslant j$ 时，$A_i\subset A_j$ ($A_j\subset A_i$).

6. 证明递增和递减集合序列必有极限，在前一情形中，

$$\lim (A_i)_{i\in\omega} = \bigcup_{i\in\omega} A_i,$$

在后一情形中，$\lim (A_i)_{i\in\omega} = \bigcap_{i\in\omega} A_i$.

7. 证明在任何自然数 n 与其后继者 n^+ 之间不存在其他自然数.

8. 设 A 是 ω 的非空子集且 $\bigcup(A) = A$，求证 $A = \omega$.

9. 设 $A \subset \omega$. 当且仅当存在 $u \in \omega$，使对每个 $n \in A$，$n \leqq u$，说 A 有上界，且说 u 是 A 的一个上界. 证明：如 $A \subset \omega$ 有上界且 $A \neq \varnothing$，则 A 有最大数，即存在 $m \in A$，使对每个 $n \in A$，$n \leqq m$.

10. 证明定理 10（递推原理）中函数 u 的唯一性.

11. 用递推原理验证，存在唯一实数列 $(a_n)_{n\in\omega}$，满足：

1) $a_0 = \frac{\pi}{2}$，2) 对于任何 $n \in \omega$，$a_{n+1} = \sin a_n$.

12. $n!$ 的定义. 证明存在唯一自然数列 $(a_n)_{n\in\omega}$ 满足：

1) $a_0 = 1$，2) 对于每个 $n \in \omega$，$a_{n^+} = n^+ \cdot a_n$.

我们定义 $n! = a_n$①. [提示：用 §6 的递推原理不能直接证明，但可间接证明. 取值集取为 $\omega \times \omega$，初值取为 $(0,1)$，递推函数取为 F: $\omega\times\omega \to \omega\times\omega$，其中 $F(i,j) = (i^+, i^+ \cdot j)$. 按递推原理，存在唯一的函数 $A: \omega \to \omega\times\omega$，满足1) $A_0 = (0,1)$，2) $A_{n^+} = F(A_n)$. 记 $A_n = (b_n, a_n)$. 不难验证 $a_0 = 1$，$b_n = n$，$a_{n^+} = n^+ \cdot a_n$.]

13. 设给定非空集合 X 及 $a \in X$. 设 f: $\omega \times X \to X$. 试仿照上题方法证明存在唯一的函数 u: $\omega \to X$，满足：

1) $u_0 = a$，2) $u_{n^+} = f(n, u_n)$.

14. 超几何级数 $\sum_{n\in\omega} a_n x^n$ 的系数 a_n 是如下定义的：

1) $a_0 = 1$，2) 对每 $n \in \omega$，$a_{n^+} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)} a_n$. ②

---

① 如假定自然数的乘法已知，在学过 §6 以后即可做此题.

② 这里认为自然数集 ω 是已知的实数集 $\boldsymbol{R}$ 的子集.

作为上题的例子，试证明确实存在唯一实数列 $(a_n)_{n\in\omega}$，满足 1)，2)。这只要指明函数 f: $\omega\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 如何定义就可以了。

15. 证明：1) $0+n=n$，2) $m^{+}+n=(m+n)^{+}$。

16. 证明 $m+n=n+m$。

17. 证明 $(l+m)+n=l+(m+n)$。

18. 证明 $m+l=n+l\Longrightarrow m=n$。

19. 证明：$m<n$，当且仅当存在自然数 $p\neq 0$，使 $n=m+p$，并且，如果这样的 p 存在，则是唯一的。

20. 证明 $m<n\Longrightarrow m+l<n+l$。

21. 验证 §7 中定义的乘法运算存在且唯一。

22. 证明：1) $0\cdot n=0$，2) $m^{+}\cdot n=m\cdot n+n$。

23. 证明 $m\cdot n=n\cdot m$。

24. 证明 $(l\cdot m)\cdot n=l\cdot(m\cdot n)$。

25. 证明 $m\cdot l=n\cdot l\wedge l\neq 0\Longrightarrow m=n$。

26. 证明 $l\cdot(m+n)=l\cdot m+l\cdot n$。

27. 证明 $m<n\wedge l\neq 0\Longrightarrow m\cdot l<n\cdot l$。

28. 对于集合 A，当且仅当存在 $n\in\omega$ 且存在从 n 到 A 的双射(一一对应)，说 A 有 n 个元素。证明：若 A 有 n 个元素，B 有 m 个元素，则：

1) 如 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\cup B$ 有 $n+m$ 个元素。

2) $A\times B$ 有 $n\cdot m$ 个元素。

29. 验证 §7 中定义的乘方运算存在且唯一。

30. 证明：若 $n\neq 0$，则 $0^{n}=0$。

31. 证明 $m^{n+l}=m^{n}\cdot m^{l}$。

32. 证明 $(m\cdot n)^{l}=m^{l}\cdot n^{l}$。

33. 证明 $(m^{n})^{l}=m^{n\cdot l}$。

34. 证明定理12(第二递推原理)中函数 u 的唯一性。

35. 利用第二递推原理重做第 12 题。[提示：第12题中的 1),2) 可写为

1) $a_0 = 1$, 2) 对于 $n \geq 1$, $a_n = n \cdot a_{n-1}$.

取值集为 ω; 递推函数的定义域 $S = \{(t_i)_{i<n} | n \in \omega \wedge \text{每 } t_i \in \omega\}$; 递推函数 $f: S \to \omega$ 如下定义:

$$f(\varnothing) = 1; \text{ 对于 } n \geq 1, f((t_i)_{i<n}) = n \cdot t_{n-1}.]$$

36. 利用第二递推原理重做第 14 题.

37. (Fibonacci数)用第二递推原理证明,存在唯一的数列$(a_n)_{n\in\omega}$,满足

1) $a_0 = 1$, 2) $a_1 = 1$, 3) 对于 $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

38. 在求 Legendre 方程的初值问题

$$\begin{cases} (1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

的幂级数解 $y = \sum_{n\in\omega} a_n x^n$ 时,得到

1) $a_0 = 1$, 2) $a_1 = 1$,

3) 对于 $n \geq 2$, $a_n = \dfrac{(n-2)(n-1) - \lambda}{(n-1)n} \cdot a_{n-2}$.

试用第二递推原理证实,存在唯一的数列$(a_n)_{n\in\omega}$, 满足 1),2),3).

第四章 集合的等势与受制

§1 集合的等势

在日常生活以及生产和科学实践中，人们经常要考虑数量的问题，即多少的问题。对于两个集合，人们往往要问：它们有一样多的元素呢，还是这个比哪个有更多的元素？ 这对"有限集"①来说是容易解决的，数一数(直接地或间接地)两个集合各有多少元素，再加以比较就可以了。 这个办法无法推广到"无穷集"的情况中去，因为"无穷集"是数不完的。在"有限集"的情况中，还有另一种办法来比较两个集合。例如，在教室有一堆桌子和一堆椅子，希望知道桌子和椅子是否一样多。 人们可以把桌子同椅子一对一地配套摆起来，如能做到桌椅恰好配套，就可断定桌子和椅子一样多，否则就不一样多。这种办法不论对"有限集"或者对"无穷集"都可适用。

【定义】 对于集合 A,B，当且仅当存在从 A 到 B 上的一个双射(一一对应)时，说 A 等势于 B，记作

$$A \approx B.$$

【例 1】 记 $\omega_e \subset \omega$ 为一切偶数的集合。可取 $f: \omega \to \omega_e$，其中 $f(n) = 2 \cdot n$。显然 f 是从 ω 到 ω_e 上的双射，故

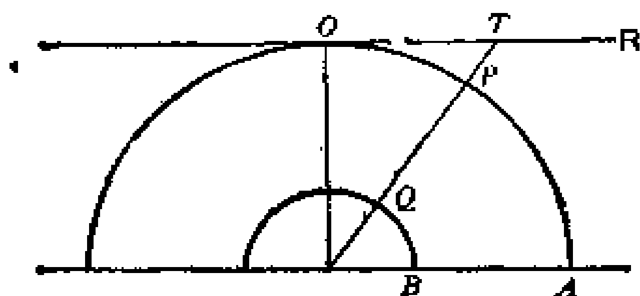
$$\omega \approx \omega_e.$$ ▌

① 有限集与无穷集的概念将在下面的 §2 中正式定义，这里只做直观理解。

这里尽管 ω_e 是 ω 的真子集，但它们之间存在一一对应！可以设想它们拥有"一样多"的元素。

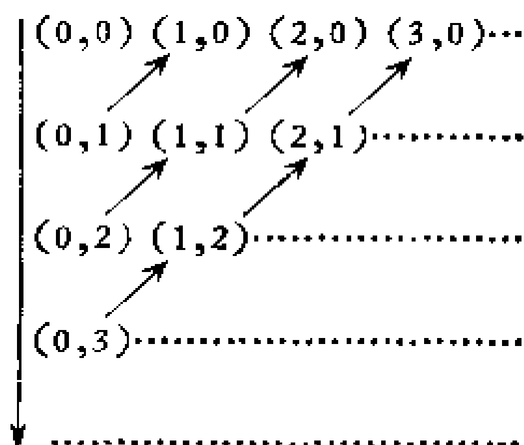
【例 2】 开区间 (0, 1) 等势于实数集 $\boldsymbol{R}$.

事实上，可取 $f:(0,1)\to\boldsymbol{R}$，其中 $f(x)=\operatorname{ctg}\pi x$. 根据三角函数的性质，不难验证 f 是从 (0, 1) 到 $\boldsymbol{R}$ 的一个双射。本题解法的直观意义如图 13 所示. ▮



大半圆半径为 1，小半圆半径为 $\frac{1}{\pi}$，弧 $\breve{BQ}$ 长为 x，T 在 $\boldsymbol{R}$ 上的坐标为 $f(x)$.

图 13



第 0 类只含 (0, 0).
第 1 类从 (0, 1) 开始.
第 2 类从 (0, 2) 开始.
第 3 类从 (0, 3) 开始.
······

图 14

【例 3】 $\omega\times\omega\approx\omega$.

如图 14，把 $\{(0,0)\}$ 叫做第 0 类，把 $\{(0,1),(1,0)\}$ 叫做第 1 类，把 $\{(0,2),(1,1),(2,0)\}$ 叫做第 2 类，一般，把由 $m+n=k$ 的序偶 (m,n) 组成的集合叫做第 k 类. 这样，先按类的次序，再在每一类中按照第一坐标的次序，依次编号，就可得到 $\omega\times\omega$ 到 ω 上的一个一一对应. 正式证明如下：设 $f:\omega\times\omega\to\omega$ 如下定义：

$$f(m,n)=\frac{(m+n)((m+n)+1)}{2}+m ①.$$

于是，1) f 是单射. 事实上，设 $(m,n)\neq(m',n')$. 或者 i) $m+n\neq m'+n'$②，不妨假定 $m+n>m'+n'$，此时由第三章，§5 的引理，$m+n\geqslant(m'+n')+1$，于是不难推出 $f(m,n)>f(m',n')$；或者 ii) $m+n=m'+n'$ 但 $m\neq m'$③，此时显然 $f(m,n)\neq f(m',n')$. 2) $f:\omega\times\omega\to\omega$ 是满射. 这可用归纳原理证明. ▋

【例 4】 ω 不能等势于实数区间 $[0,1)$.

首先，我们说级数

$$\sum_{i=0}^{\infty}a_i\cdot 10^{-(i+1)}$$

是一个标准十进小数，当且仅当，每个 a_i 在 $\{0,1,\cdots,9\}$ 中取值，但不从某项起全为 9. 可以证明④，$[0,1)$ 中任一实数可

① 不难验证，对于任何的自然数 k，$k(k+1)=2p$，其中 p 是某一自然数. 记 $p=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

② 这是 (m,n) 与 (m',n') 不属于同一类的情形.

③ 这是 (m,n) 与 (m',n') 属于同一类但具有不同的第一坐标的情形.

④ 参看，《数系—从自然数到复数》，第四章，附录 I.

表示成唯一的标准十进小数，同时任一标准十进小数收敛于 $[0,1)$ 中唯一实数．在以上关于 a_i 的规定下，我们称 $(a_i)_{i\in\omega}$ 为一个标准十进序列．这样，区间 $[0,1)$ 就等势于一切标准十进序列的集合 D．

以下证明 ω 不能等势于 D．事实上，对于任何从 ω 到 D 内的映射 f，记 $f(j)=(a_i^j)_{i\in\omega}$（参看图 15）．我们可以构造一个标准十进序列 $b=(b_i)_{i\in\omega}$，使对每个 $i\in\omega$，$b_i\neq a_i^i$，例如，当 $a_i^i=8$ 或 9 时，取 $b_i=0$；当 $a_i^i=0$ 或 1 或……或 7 时，取 $b_i=a_i^i+1$．这样，$b\in D$，但对于每个 $j\in\omega$，$b\neq f(j)$．

$$
\begin{aligned}
f(0)&=(a_0^0,\ a_1^0,\ a_2^0,\cdots)\\
f(1)&=(a_0^1,\ a_1^1,\ a_2^1,\cdots)\\
f(2)&=(a_0^2,\ a_1^2,\ a_2^2,\cdots)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$b=(b_0,b_1,b_2,\cdots)$　$b_0\neq a_0^0, b_1\neq a_1^1,$　$b_2\neq a_2^2,\cdots$

图　15

这就是说，$b\notin \operatorname{ran}(f)$，可见 $f:\omega\to D$ 不是满射．由于 f 是任意的，故不存在从 ω 到 D 的满射，更谈不上存在双射了．由此推出不存在从 ω 到区间 $[0,1)$ 的双射（参看下面的定理 1，3））． ∎

以上证法首先由 Cantor 给出(1890)，它被称为“对角线方法”．

【例 5】　设给定集合 X．对于任何的 $A\subset X$，考虑特征函数 $C_A: X\to 2$（第二章，§6，例 3）．按照第二章，§6 规定的记号，2^X 是定义在 X 上的一切特征函数的集合．以下证明

X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 等势于 2^X:

$$\mathscr{P}(X) \approx 2^X.$$

事实上,可取 $f: \mathscr{P}(X) \to 2^X$, 其中对于任何的 $A \in \mathscr{P}(X)$ (即 $A \subset X$), $f(A) = C_A$. 不难验证 $f: \mathscr{P}(X) \to 2^X$ 是双射. ∎

以下定理给出≈的一般性质:

【定理 1】 对于任何的集合 A, B, C,

1) (自反性) $A \approx A$;

2) (对称性) $A \approx B \Rightarrow B \approx A$;

3) (传递性) $A \approx B \wedge B \approx C \Rightarrow A \approx C$.

证 1) A 上的恒等函数(第二章, §6, 例1)可以充当从 A 到自己上的一一对应.

2) 设 f 是从 A 到 B 的双射,则 f^{-1} 是 B 到 A 的双射(第二章, §8, 定理 8).

3) 设 f 是从 A 到 B 的双射, g 是从 B 到 C 的双射, 则 $g \circ f$ 是 A 到 C 的双射. 这是不难验证的. ∎

按照对称性,在本书今后的行文中,我们就不再区分"A 等势于 B"和"B 等势于 A",有时也说"A, B 等势".

下面是关于≈的另外一些一般性质: 对于任何的集合 A, B, C, D:

I. $A \approx C \wedge B \approx D \Rightarrow A \times B \approx C \times D$.

II. $A \approx C \wedge B \approx D \wedge A \cap C = B \cap D = \varnothing \Rightarrow A \cup B \approx C \cup D$.

III. $A \approx B \Rightarrow \mathscr{P}(A) \approx \mathscr{P}(B)$.

这些都不难验证(习题四,第 4 题).

§2 有限集

“有限”与“无穷”这两个词，我们已多次在非正式的说明中用到了．本节将给出有限集与无穷集的正式定义．我们准备利用自然数和等势概念定义有限集．例如，等势于 $0=\varnothing$ 的集合我们说它没有元素(参看下面引理 1)，等势于 $1=\{0\}$ 的集合我们说它有一个元素，等势于 $2=\{0, 1\}$ 的集合我们说它有两个元素，等等，这些都叫做有限集．一般：

【定义】 对于集合 A，当且仅当存在一个自然数 n，使 $A\approx n$，我们说 A 是有限集． 否则 (即不存在这样的自然数 n) 说 A 是无穷集．

注意，定义中对有限集只要求它等势于某一自然数，并未要求这样的自然数是唯一的．这就是说，如 $A\approx n$ 且 $A\approx m$，是否定有 $n=m$? 换句话说，如自然数 $n\approx m$，能否推出 $n=m$? 这从直观上看是明显的但在逻辑上并不明显，因为一般说来，两个等势的集合并不一定重合．在下面的引理 2 中，我们将断定对于特殊的集合自然数来说，二者等势则二者重合．在此之前，先看自然数 0 的情况：

【引理1】 与 0 等势的集合只有它自己，特别是，与0等势的自然数只有它自己．

证　设 $0\approx A$． 即存在从 0 到 A 上的双射 f． 按第二章，§6，注 1，$f=\varnothing$．此外，作为双射的 $f:\varnothing\to A$，是满占的，所以 $A=\operatorname{ran}(f)=\operatorname{ran}(\varnothing)=\varnothing$． ∎

【引理 2】 对于任何的自然数 m，n，

$$m\approx n\Rightarrow m=n.$$

证 设

$$T=\{n\in\omega\mid\forall m\in\omega(m\approx n\Rightarrow m=n)\}.$$

以下用归纳原理证明 T 与 ω 重合.

i) $0\in T$. 由引理 1.

ii) 设 $n\in T$, 看 n^+, 设 $m\approx n^+$. 因 $n^+\neq 0$ (第三章, §2, 定理 1), 故由引理 1, $m\neq 0$. 设 p 是 m 的先行者 (第三章, §2, 定理 4): $p^+=m$. 于是 $p^+\approx n^+$, 即存在双射 f: $n^+\to p^+$. 以下证明 $p^+=n^+$ (即 $m=n^+$), 由此即可推知 $n^+\in T$.

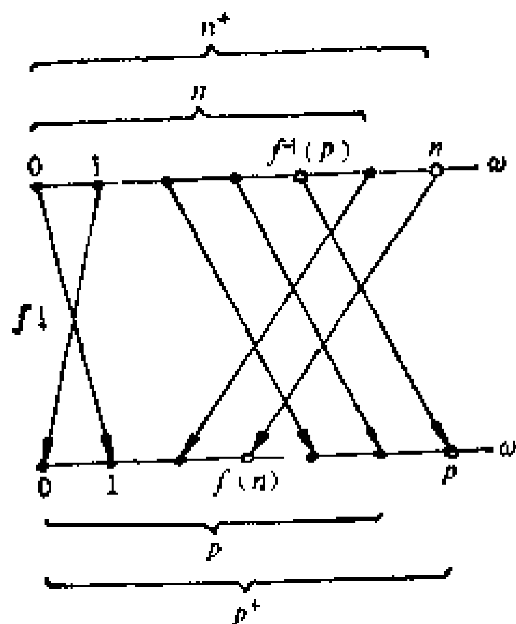


图 16(a) $n^+\approx p^+$

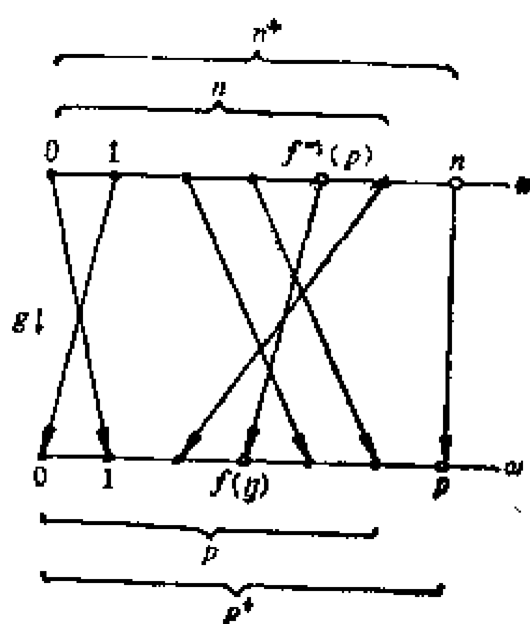


图 16(b) $n\approx p$

现在通过从 n^+ 到 p^+ 上的双射 f 来构造一个从 n 到 p 上的双射. 如果恰好 $p=f(n)$, 那么 f 的限制 $f\upharpoonright n$ 就是从 n 到 p 上的双射. 问题出在 $p\neq f(n)$ 的情况(参看图 16(a)). 这时只要把 f 在 n 的值同它在 $f^{-1}(p)$ 的值互相调换就可以了(参看图 16(b)). 正式叙述如下:

设 $g: n^+ \to p^+$，其中

$$g(i) = \begin{cases} p, & \text{当 } i = n, \\ f(n), & \text{当 } i = f^{-1}(p), \\ f(i), & \text{当 } i \neq n \wedge i \neq f^{-1}(p). \end{cases}$$

则 g 是从 n^+ 到 p^+ 上的双射(请补出证明的细节)，且 $g(n) = p$. 这样，$g \restriction n$ 就是从 n 到 p 上的双射，故 $n \approx p$. 按归纳假设：$n \in T$，故 $n = p$. 从而 $n^+ = p^+ = m$. 可见 $n^+ \in T$.

按归纳原理，$T = \omega$. 引理 2 得证. ▮

由引理 2 可知，如某个集合与两个自然数等势，这两个自然数必重合. 这就是：

【定理 2】 与某一有限集等势的自然数是唯一的.

我们把与有限集 A 等势的唯一自然数叫做 A 的元素个数，记为 $N(A)$. 这同通常的观念是一致的. 例如，空集的元素个数为 0，单集的元素个数为1，真偶集的元素个数为 2. 又如，每个自然数 n 的元素个数等于 n 自己：

$$N(n) = n.$$

例如，0 的元素个数为 0，1 的元素个数为 1，2 的元素个数为 2，等等.

在下面的定理 3 中，我们将证明一个重要的事实——有限集的子集总是有限的. 读者可能感到这事实太明显了，不需要证明. 请看下面的分析：我们说集合 A 有限，指的是存在 $n \in \omega$，使 $A \approx n$. 我们说 $B \subset A$，指的是对于任何的 x，$x \in B \Rightarrow x \in A$. 由这两个假定怎能直接断定存在 $m \in \omega$，使 $B \approx m$ 呢？看来这是需要证明的. 为此，先证以下的特殊情况：

【引理 3】 设 B 是自然数 n 的真子集，则存在一个自然

数 $m < n$，使 $B \approx m$（由定理 2，这自然数 m 是唯一的）。

证 设

$$T = \{n \in \omega \mid \forall B \subsetneqq n \exists \text{自然数 } m < n (B \approx m)\}.$$

以下用归纳原理证明 T 与 ω 重合。

i) $0 \in T$。这是因为 $B \subsetneqq 0$ 永不成立。

ii) 设 $n \in T$。看 n^+：设 $B \subsetneqq n^+$。我们将证明存在小于 n^+ 的自然数 m，与 B 等势。分以下两种情形考虑：

（点子表示 B 的元素）

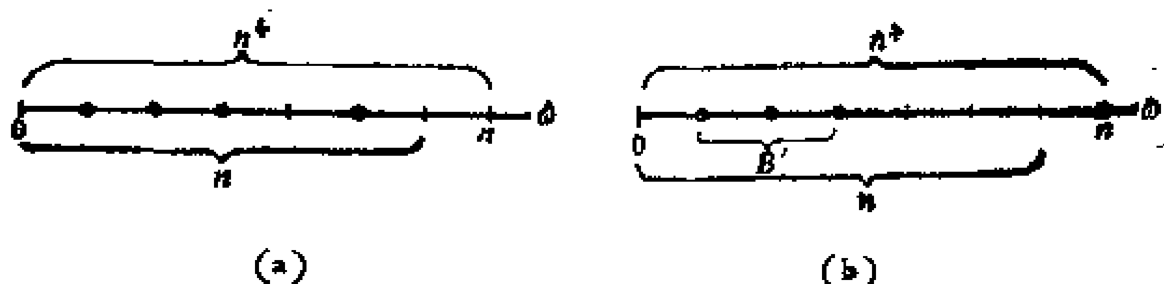


图 17

(a) $n \notin B$。此时由假设 $B \subset n^+ = n \cup \{n\}$，知 $B \subset n$（参看图 17(a)）：

或者 $B = n$，则可取 $m = n$。于是 $m < n^+$ 且 $B = m$。

或者 $B \subsetneqq n$，则由归纳假设 $n \in T$，知存在 $m < n < n^+$，$B \approx m$。

(b) $n \in B$。此时将 n 从 B 中减掉，并设

$$B' = B - \{n\}$$

（参看图 17(b)）。由假设 $B \subset n^+$，知 $B' \subset n^+ = n \cup \{n\}$。因 $n \notin B'$，故 $B' \subset n$。但 $B' \neq n$，否则 $B = B' \cup \{n\} = n^+$，与假设不合。可见 $B' \subsetneqq n$。由归纳假设，知存在 $m < n$，且存在双射 $f: m \to B'$，如下延拓 f：

$$g(i)=\begin{cases}f(i), & \text{当 } i\in m,\\ n, & \text{当 } i=m.\end{cases}$$

不难验证 $g: m^+\to B$ 是双射，从而 $m^+\approx B$. 此外，由 $m<n$ 知 $m^+<n^+$（第三章，§4，引理1）.

最后断定 $n^+\in T$.

按归纳原理，$T=\omega$. 引理3得证. ▮

根据引理3，可以断定，自然数的子集必是有限集. 以下定理是一般的情况：

【定理 3】 有限集的任何子集是有限集.

证 设 A 是有限集，即存在 $n\in\omega$ 且存在双射 $f: A\to n$. 设 $B\subset A$. 如 $B=A$，则定理的结论当然成立. 如 $B\subsetneq A$，则因 $f: A\to n$ 是双射，B 的象 $f(B)\subsetneq f(A)=n$. 按引理3，存在自然数 $m<n$，使 $f(B)\approx m$. 由于 f 是双射，故 $B\approx f(B)$，从而 $B\approx m$. 故 B 是有限集. ▮

在定理3的证明中，如 $B\subsetneq A$，则因 $A\approx n$，$B\approx m$，且 $m<n$，故 A 不能等势于 B，否则按引理1，$m=n$. 同时，因 $m=N(B)$，$n=N(A)$，故 $N(B)<N(A)$. 这就是：

【定理 4】 有限集 A 不能与其任何真子集 B 等势，且 $N(B)<N(A)$.

定理4说，不能与自己的任何真子集等势是一个集合成为有限集的必要条件. 因此也就得出一个集合成为无穷集（非有限的集合）的充分条件：

【推论】 如集合 A 与其某一真子集等势，则 A 是无穷集.

例如，ω 与其真子集——偶数集 ω_e 等势（§1，例1），故 ω 是无穷集. 又如，$\boldsymbol{R}$ 与其真子集 $(0,1)$ 等势（§1，例2），故 $\boldsymbol{R}$ 是无穷集.

值得一提的是，我们主要靠无穷公理（第三章，§2）肯定了自然数集ω的存在，当时"无穷"只是公理的名称，本身并未定义．现在，在正式定义无穷集（非有限的集合）以后，我们第一次推出ω是无穷集，同时也就肯定了无穷集是存在的． 这种无穷性不是潜在的，无穷集被承认为实体（参看第三章，§2的议论）．

§3 集合的受制

在上节，我们引入了有限集的元素个数的概念． 对一般集合来说，等势概念可以看作两有限集有相同的元素个数的推广．以下定义的"A受制于B"的概念可以看作"有限集A的元素个数$\leqslant$有限集B的元素个数"的推广．如果存在从A到B的一个单射f，那么，$A\approx f(A)\subset B$． 这可看成A同B的一部分$f(A)$（包括$f(A)=B$的情形）有"一样多"的元素，或者说，A的元素不比B的元素"多"．在此情况下，就说A受制于B，这就是：

【定义】 对于集合A，B，当且仅当存在从A到B内的一个单射，说A受制于B，记为

$$A\preccurlyeq B.$$

当且仅当$A\preccurlyeq B$且A不与B等势，说A严格受制于B，记为

$$A\prec B.$$

【注1】 受制的定义可改写为：当且仅当A等势于B的某个子集时，说A受制于B．

事实上，如f是从A到$B_1\subset B$上的双射，则f是从A到B内的单射．另一方面，如f是从A到B内的单射，则f是从

A 到 $f(A)\subset B$ 上的双射。 ▮

例如，设 A, B 是有限集，则 $A\preccurlyeq B$ 同 $N(A)\leqq N(B)$ 是一致的；同时，$A\prec B$ 同 $N(A)<N(B)$ 是一致的。又如，在 §1，例 4 中已证 ω 不与区间 $[1, 0)$ 等势，但 ω 与 $[0, 1)$ 的子集 $\left\{\frac{1}{n+2}\middle| n\in\omega\right\}$ 等势，故 $\omega\prec[0, 1)$。

【注 2】 如 A 是 B 的子集，则 $A\preccurlyeq B$，特别是，$A\preccurlyeq A$。这是因为，A 与自己等势。 ▮

但应注意，一般说来，即使 A 是 B 的真子集，也不一定 $A\prec B$，§1 的例 1 和例 2 说明这一点。

【注 3】 $\preccurlyeq$ 具有传递性，即

$$A\preccurlyeq B\wedge B\preccurlyeq C\Rightarrow A\preccurlyeq C.$$

按定义这是显然的。

以下的定理申明，任何一个集合必严格受制于它的幂集。

【定理 5】 (Cantor) 对于任何集合 X,

$$X\prec\mathscr{P}(X).$$

证 1) $X\preccurlyeq\mathscr{P}(X)$。 事实上，设 f: $X\to\mathscr{P}(X)$，其中 $f(x)=\{x\}$。不难看出 f 是单射。

2) X 不与 $\mathscr{P}(X)$ 等势。事实上，设 f 是从 X 到 $\mathscr{P}(X)$ 内的任一映射。对于任何的 $x\in X$, $f(x)\subset X$。 以下构造一个集合 $B\in\mathscr{P}(X)$，使 B 不在 f 的值域。我们把满足 $x\notin f(x)$ 的一切 $x\in X$ 集拢起来，设

$$B=\{x\in X\,|\,x\notin f(x)\}.$$

按子集公理，B 是一个集合。 B 既然是 X 的子集，故 $B\in\mathscr{P}(X)$。以下证明 $B\notin\operatorname{ran}(f)$。事实上，按 B 的定义，对于任何的 $x\in X$，

$$x \in B \Longleftrightarrow x \notin f(x),$$

从而对于任何的 $x \in X$，$f(x) \neq B$，否则就得到矛盾结果：$\exists x \in X(x \in B \Longleftrightarrow x \notin B)$. 这就是说，$B \notin \operatorname{ran}(f)$. 可见 $f: X \to \mathscr{P}(X)$ 不能是满射. 由 f 的任意性，可以断定，不存在从 X 到 $\mathscr{P}(X)$ 上的满射，更谈不上双射了①. ▮

已证的 Cantor 定理是集合论中一个重要的定理，它说明对于不论多么"大"的集合，总存在一个集合，例如它的幂集，比它还要"大".

【注 4】 由于 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 与定义在 X 上的一切特征函数的集合 2^X 等势(§1，例 5)，故 Cantor 定理也可写成

$$X \prec 2^X.$$

现在仍回到一般受制概念. 如果集合 A，B 互相受制：

$$A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A,$$

我们可以设想，A 的元素不比 B 的元素"多"，同时 B 的元素也不比 A 的元素"多"，从而可以设想，A 与 B 有"同样多"的元素，即设想

$$A \approx B.$$

对于有限集 A，B 来说，这是不难证明的. 但是对于一般集合来说，$A \preccurlyeq B$ 指的是存在从 A 到 B 内的一个单射 f，$B \preccurlyeq A$ 指的是存在从 B 到 A 内的一个单射 g，这里 f 和 g 相互之间可以有着很大的独立性. 这样，怎能直接判断存在 A 到 B (或 B 到 A) 的一个双射呢? 不过，这到底是可以证明的. 我们准备给出这一结论的正式证明. 先初步分析一下我们证明的思路. 设 $f: A \to B$ 和 $g: B \to A$ 都是单射. 如能像图 18 那样，

① 这个证明方法的总精神同 §1，例 4 的"对角线"证明方法是一样的. 读者试比较一下.

把 A 和 B 分别拆成互不相交的两部分 A_1，A_2 和 B_1，B_2，使映射 f，g 在它们上面的作用既互相补充又不互相干扰，即恰好

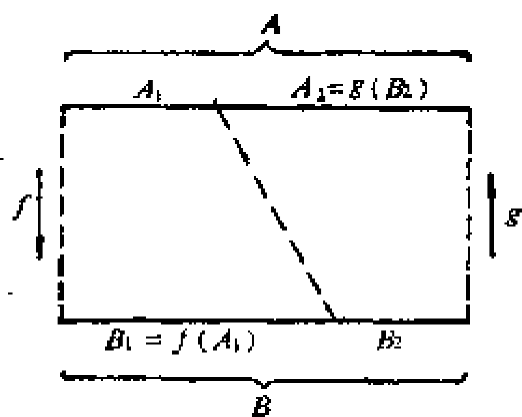


图　18

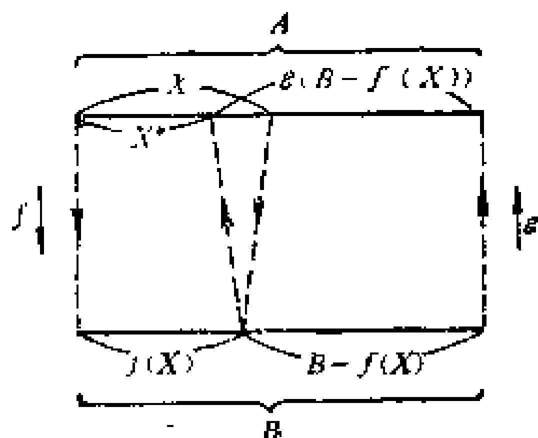


图　19

使 $B_1=f(A_1)$，且 $A_2=g(B_2)$，那么，$(f\upharpoonright A_1)\cup(g\upharpoonright B_2)^{-1}$ 就是所求的从 A 到 B 的双射．以下引理肯定这"拆开工作"的可能性．

【引理】　设给定 $f: A\to B$ 和 $g: B\to A$．则存在 A_1，A_2，B_1，B_2，使

i) $A=A_1\cup A_2$ 且 $B=B_1\cup B_2$，同时 $A_1\cap A_2=\varnothing$ 且 $B_1\cap B_2=\varnothing$，

ii) $f(A_1)=B_1$ 且 $g(B_2)=A_2$．

【分析】　任取 $X\subset A$，用 f 把它映射为 $f(X)\subset B$（参看图 19）．取 B 中的剩余部分 $B-f(X)$，用 g 把它映射为 $g(B-f(X))\subset A$．再取 A 中的剩余部分

$$X^*=A-g(B-f(X)).$$

假如 $X=X^*$，则 X 就是所求的 A_1，问题就解决了．但由于函数 f，g 以及 $X\subset A$ 的任意性，X 与 X^* 甚至可能不相交，

即使它们相交，可能 $X^*\subset X$，可能 $X\subset X^*$，也可能都不是。在这各种可能中，我们只考虑能使 $X^*\subset X$ 的那些 $X\subset A$，姑且叫它们为 A 的"正规"子集。显然 A 是自己的一个"正规"子集，是最大的一个。除非 $f: A\to B$ 本来是个双射，这最大"正规"子集是不会满足 $A=A^*$ 的。可以设想，另一个极端——最小的"正规"子集（一切"正规"子集的交集）可能满足要求。这个设想是否成立就靠逻辑推证了。

证 对于任何 $X\subset A$，设 X^* 如上规定。

1) 如 $X_1\subset X_2\subset A$，则 $X_1^*\subset X_2^*$。这是因为

$$
\begin{aligned}
X_1\subset X_2 &\Rightarrow f(X_1)\subset f(X_2) \Rightarrow B-f(X_2)\subset B-f(X_1)\\
&\Rightarrow g(B-f(X_2))\subset g(B-f(X_1))\\
&\Rightarrow X_1^*\subset X_2^*.
\end{aligned}
$$

2) 设 $M=\{X\in\mathscr{P}(A)\mid X^*\subset X\}$（上述"正规"子集组成的集合）。因 $A\in M$，故 $M\neq\varnothing$。设 $A_1=\bigcap(M)$。以下证明 $A_1=A_1^*$。事实上，对于任何的 $X\in M$，$A_1\subset X$。按 1) 中已证，$A_1^*\subset X^*\subset X$。由于 $X\in M$ 是任意的，可见 $A_1^*\subset A_1$。另一方面，再由 1)，从最后的包容式子可得 $A_1^{**}\subset A_1^*$，可见 $A_1^*\in M$，从而 $A_1\subset A_1^*$。最后，$A_1=A_1^*$。

3) 设 $B_1=f(A_1)$，$B_2=B-f(A_1)$，$A_2=g(B_2)$。则由 A_1^* 的意义及等式 $A_1=A_1^*$，我们有 $A_1=A-A_2$。这就证明 A_1，A_2，B_1，B_2 满足引理中i)，ii) 两项要求。 ∎

【定理 6】 (Schröder-Bernstein) 对于任何的集合 A, B，

$$
A\preccurlyeq B\wedge B\preccurlyeq A\Rightarrow A\approx B.
$$

证 设引理中的 f 和 g 都是单叶的，则 $f\upharpoonright A_1: A_1\to B_1$ 和 $g\upharpoonright B_2: B_2\to A_2$ 都是双射。设 $h=(f\upharpoonright A_1)\cup(g\upharpoonright B_2)^{-1}$，则 $h: A\to B$ 是双射。 ∎

在上面注 1 的例子中，我们已经看到自然数集 ω 严格受制于区间 $[0, 1)$. 以下的例 1 申明，ω 的幂集(空集和以自然数为元素的一切可能的集合组成的集合)与 $[0, 1)$ 等势.

【例 1】 $[0, 1)\approx 2^{\omega}\approx \mathscr{P}(\omega)$.

事实上，用 D 记一切标准十进序列的集合，则 $D\approx[0, 1)$ (§ 1，例 4). 集合 2^{ω} 由这样的序列 $(a_i)_{i\in\omega}$ 组成：其中各项 a_i 只在 $\{0, 1\}$ 中取值. 可见 $2^{\omega}\subset D$. 于是 $2^{\omega}\preccurlyeq[0,1)$. 另一方面，我们说 $(a_i)_{i\in\omega}$ 是标准二进序列，当且仅当，每项 a_i 在 $\{0, 1\}$ 中取值，且不从某项起全为 1. 用 E 记一切标准二进序列的集合. 同十进的情形一样，$E\approx[0, 1)$. 同时显然 $E\subset 2^{\omega}$，于是 $[0, 1)\preccurlyeq 2^{\omega}$. 由 Schröder-Bernstein 定理，最后得到 $[0, 1)\approx 2^{\omega}$. 至于 $2^{\omega}\approx\mathscr{P}(\omega)$，则是 §1，例 5 的特殊情形. ∎

不难验证(习题四，19)，定理 6 与以下命题等价：

【定理 6′】 (Schröder-Bernstein) 对于任何的集合 A, B, C,

$$A\preccurlyeq B\preccurlyeq C\wedge A\approx C\Rightarrow A\approx B\approx C.$$

【推论】 $A\subset B\subset C\wedge A\approx C\Rightarrow A\approx B\approx C$.

【例 2】 区间 $(0, 1)\approx[0, 1)\approx(0, 1]\approx[0, 1]$.

事实上，$(0, 1)\approx\boldsymbol{R}$(§ 1，例 2)，同时 $(0, 1)\subset[0, 1)\subset\boldsymbol{R}$, $(0, 1)\subset(0, 1]\subset\boldsymbol{R}$, $(0, 1)\subset[0, 1]\subset\boldsymbol{R}$. ∎

把例 1 和例 2 结合起来，我们有

$$(0, 1)\approx 2^{\omega}\approx\mathscr{P}(\omega).$$

这是说，0，1 间一切实数的集合，在 $\{0, 1\}$ 中取值的一切序列的集合，由自然数组成的一切集合的集合，三者两两等势.

通常把开区间 $(0,1)$ 叫做连续统. 我们已经证明实数集 $\boldsymbol{R}$ 与连续统等势. 另外,不难验证, 任何有限开区间 (a, b) (其中 $a < b$) 与连续统等势(请读者写出一个 $(0,1)$ 到 (a, b) 的双射). 利用定理 6′, 可以推知数轴上的任何区间①,不论是有限的或无限的,开的,闭的或半开的,都与连续统等势.

作为本节的结尾, 我们对集合的受制问题做些进一步的议论. 对于两个集合 A, B, 当且仅当 $A \preccurlyeq B$ 或 $B \preccurlyeq A$ 有一成立时, 说它们是可较的. 本节讨论的都是可较的情况. 我们的问题是,是否任何两个集合必定可较? 这在直观上似乎明显,但在逻辑上并不明显,因为我们的问题是说, 对于任何两个集合,是否一定存在从其中之一到另一个里边的单射?我们还没任何理论根据对此做肯定的答复. 这个问题留待下一章解决(看第五章, §5, 定理 8).

§4 选择公理

先看一个具体例子.

假定: 定义在开区间 (α, β) 上的实值函数 f 无界.

那么,对于每个 $n \in \omega$, 总存在 $x \in (\alpha, \beta)$, 使 $|f(x)| > n$, 这就是说, 集合 $A_n = \{x \in (\alpha, \beta) \mid |f(x)| > n\}$ 是不空的. 从每个 A_n 中任选一个元素,记为 a_n.

结论: 我们得到一个数列 $(a_n)_{n \in \omega}$, 对于每个 $n \in \omega$, $a_n \in (\alpha, \beta)$ 且 $|f(a_n)| > n$.

现在看结论的根据是否充分. 我们知道, 所谓数列

① 不包括退化的区间 $[a, a] = \{a\}$.

$(a_n)_{n\in\omega}$（其中每个 $a_n\in(\alpha,\beta)$）是从 ω 到 (α,β) 内的一个确定的函数，而我们的每个 a_n 却是从 A_n 中任选的，并且，我们也无法明确给出选择的法则①！

以下的选择公理，对于这个例子来说，就是承认这样的选择法则是存在的，不管它能否明确给出。

> **选择公理**
>
> 从非空集组成的非空族的每一项里，可以选出一个元素，组成一个族。这就是说，设给定集族 $(A_i)_{i\in I}$，其中标集 $I\neq\varnothing$②，且对于每个 $i\in I$，$A_i\neq\varnothing$，那么，存在一个族 $(a_i)_{i\in I}$，使对于每个 $i\in I$，$a_i\in A_i$。

图 20 给出了选择公理的示意图。

例如，在上面的实例中，标集 $I=\omega$，集族

$$(A_i)_{i\in I}=(A_n)_{n\in\omega}.$$

选择公理保证了例中数列 $(a_n)_{n\in\omega}$ 的存在。

选择公理又名 Zermelo 公理，是集合论公理化的带头人 E. Zermelo 在 1904 年提出的。自从 Zermelo 提出这个公理之后，就受到不少数学家的非议。这些非议是可以理解的。例如在上面的实例中，我们无法明确给出从每个 A_n 中选择 a_n 的法则，但选择公理却承认至少存在一个这样的选择法则。可

---

① 如将开区间 (α,β) 换成闭区间 $[\alpha,\beta]$，那么，可取 $a_n=\sup\{x\in[\alpha,\beta]\mid|f(x)|\geq n+1\}$。这就避开了选择的问题而得到数列 $(a_n)_{n\in\omega}$，使每个 $a_n\in[\alpha,\beta]$ 且 $|f(a_n)|>n$。

② 一个族（函数）非空同它的标集（定义域）非空是一致的（第二章，§6，注1）。

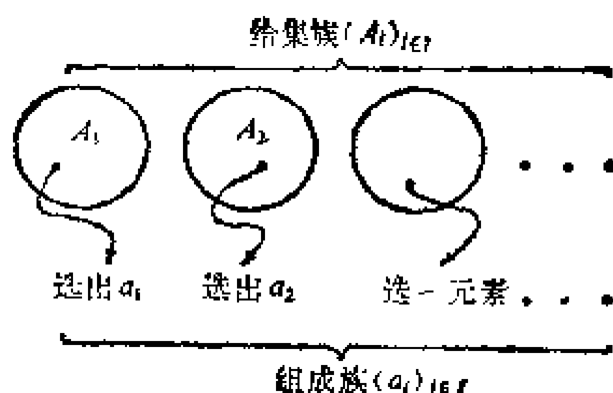


图　20

见选择公理是可以怀疑的．不过，选择公理以及它的等价命题，特别是 Zorn 引理(看下面第五章，§6)，却是目前集合论本身以及其他数学分支中一些重要结果的理论根据．并且，在 1938 年，K. Gödel 已证明，如果假定在我们采用的集合论的 (ZF) 公理系统（看第一章，§1 及第六章，§4) 中，除择选公理外的其他公理是相容的，那么选择公理也同它们相容①．这就是说，从逻辑上看，在我们的公理系统里否定不了选择公理．按照本书的目的——向读者介绍作为数学各分支通用基础的集合论，我们还是把它作为公理而承认下来．

以下利用笛卡尔积这一术语来表述选择公理．我们在第二章，§9 曾定义集族$(A_i)_{i\in I}$ 诸项的笛卡尔集(已证存在)是

---

① K. Gödel: The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24(1938).
此外，在P. Cohen: The Independence of the Continuum Hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 50(1963), 51(1964) 中，证明了选择公理在 (ZF) 系统中的独立性．

$$\bigtimes_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} | \forall i \in I(a_i \in A_i)\},$$

但当时并未明确，如果集族 $(A_i)_{i\in I}$ 不空而且它的每项 A_i 不空，那么笛卡尔积 $\bigtimes_{i\in I} A_i$ 是否也不空？对此做出肯定答复恰好就是选择公理。这样，可把选择公理写成如下形式：

选择公理

由非空集合组成的非空族，其诸项的笛卡尔积是非空的。这就是说，设给定集族 $(A_i)_{i\in I}$，其中 $I \neq \varnothing$，且对于每个 $i\in I$，$A_i \neq \varnothing$，那么，$\bigtimes_{i\in I} A_i \neq \varnothing$。

选择公理的以上两种形式，其区别只在于是否利用笛卡尔积这一术语。它还有另外几个等价形式，以下介绍其中常用的一个。

设给定非空集合 A，看它的一切非空子集组成的集合，即看集组 $I = \mathscr{P}(A) - \{\varnothing\}$。以下按第二章，§9 中所述方法把集组问题化为集族问题。设 Φ 是 I 上的恒等函数，我们得到一个集族 $(\Phi(B))_{B\in I}$，其中对于每个 $B \in I$，$\Phi(B) = B$。根据选择公理，存在一个族 $(\varphi(B))_{B\in I}$，使对于每个 $B \in I$，$\varphi(B) \in \Phi(B) = B$。这就是说，我们从选择公理推出以下命题：

"对于非空集合 A，存在一个函数 φ: $\mathscr{P}(A) - \{\varnothing\} \to A$，使对于 A 的每个非空子集 B，$\varphi(B) \in B$."

另一方面，如果承认以上命题，同样可以推出选择公理。事实上，假定命题成立，并给定集族 $(A_i)_{i\in I}$，其中 $I \neq \varnothing$，且每个 $A_i \neq \varnothing$。看并集 $U = \bigcup_{i\in I} A_i$。则 $U \neq \varnothing$ 且每个

A_i 都是 U 的非空子集。按所述命题，存在函数

$$\varphi: \mathscr{P}(U) - \{\varnothing\} \to U,$$

使对于 U 的每一非空子集 B，$\varphi(B) \in B$。特别是，对于每个 A_i，$\varphi(A_i) \in A_i$。记 $a_i = \varphi(A_i)$（即 $a = \varphi \circ A$），就得到族 $(a_i)_{i \in I}$，其中每个 $a_i \in A_i$。 ∎

我们对以上与选择公理等价的命题仍保持原来的名称：

选择公理

对于每个非空集合 A，存在一个函数 φ（称为 A 的选择函数），它从 A 的每一非空子集中选出一个元素。这就是说，设 $A \neq \varnothing$，则存在函数 $\varphi: \mathscr{P}(A) - \{\varnothing\} \to A$，使 $\varphi(B) \in B$。

应该指出，选择公理主要针对无穷的集族而设立的。对于有限集族 $(A_i)_{i \in n}$，其中 $n \in \omega$，且 $n \neq 0$，选择公理的结论是可用归纳原理证明的（习题四，22）。

下面是选择公理的一个应用。按第二章，§6 的定义，映射的单叶性和满占性似乎是两个互不相干的概念。但是，从直观上看，如果存在从 A 到 B 内的一个单射 f，就说明 A 同 B 的子集 $f(A)$ 有“同样多”的元素，因而 A 的元素不会“多于”B 的元素。另一方面，如果存在从 B 到 A 上的一个满射 g，即 A 的每一元素 x 在 B 中至少有一个（往往不止一个）相应的 y：$g(y) = x$（参看图 21），这也说明 A 的元素不会“多于” B 的元素。看来，存在从 A 到 B 的单射同存在从 B 到 A 的满射应是一致的，这就是

【定理 7】 设 $A \neq \varnothing$。我们有

存在单射 $f: A \to B \Longleftrightarrow$ 存在满射 $g: B \to A$。

证 1）设存在单射 $f: A \to B$。则 $f: A \to f(A)$ 就是双

射．它的逆映射 $f^{-1}: f(A) \to A$ 仍是双射．对于 B 的其余部分的元素，一律让某一固定的 $a \in A$（因 $A \neq \varnothing$，这 a 是存在的）与之对应．这就是说，设 $g: B \to A$，其中

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & \text{当 } y \in f(A), \\ a, & \text{当 } y \in B - f(A). \end{cases}$$

g 就是从 B 到 A 上的满射①．

2）设存在满射 $g: B \to A$．要想得到从 A 到 B 的单射，只要对于每个 $x \in A$，在使 $g(y) = x$ 的诸 y 当中，只选一个与之对应，而把其他弃置不问就可以了（参看图 21）．这就是说，设 $B_x = \{y \in B \mid g(y) = x\}$，我们就得到集族 $(B_x)_{x \in A}$．现在 $A \neq \varnothing$，且因 g 是从 B 到 A 的满射，故每个 $B_x \neq \varnothing$．于是按选择公理，存在 $f: A \to B$，使对每个 $x \in A$，$f(x) \in B_x$，即 $g(f(x)) = x$．这个 f 是单叶的，因为：

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2. \text{ ②} \quad \blacksquare$$

在§3的定义中，我们用从 A 到 B 的单射的存在来定义 A 受制于 B．现在，对于 $A \neq \varnothing$，以下推论给出 A 受制于 B 的另一个必要且充分条件：

【推论】 设 $A \neq \varnothing$，则

$$A \preccurlyeq B \Longleftrightarrow \text{存在满射 } g: B \to A.$$

---

① 如 $A = \varnothing$，则 $f = \varnothing$ 是从 $\varnothing$ 到 B 的唯一单射（第二章，§6，注1；习题二，17）．此时，如 $B \neq \varnothing$，则不存在从 B 到 $\varnothing$ 的任何映射（第二章，§6，注2）．可见 $A = \varnothing$ 时，$\Rightarrow$ 部分不能一般成立．

② $A = \varnothing$ 并不防碍 $\Leftarrow$ 部分成立．事实上，如 $A = \varnothing$ 且 $B = \varnothing$，则 $g = \varnothing$ 是从 B 到 A 的唯一满射（第二章，§6，注1；习题二，18），同时 $f = \varnothing$ 是从 A 到 B 的唯一单射（见注①），故此时 $\Leftarrow$ 部分成立．如 $A = \varnothing$ 但 $B \neq \varnothing$，则永不存在从 B 到 A 的映射，故此时 $\Leftarrow$ 部分还是成立的．

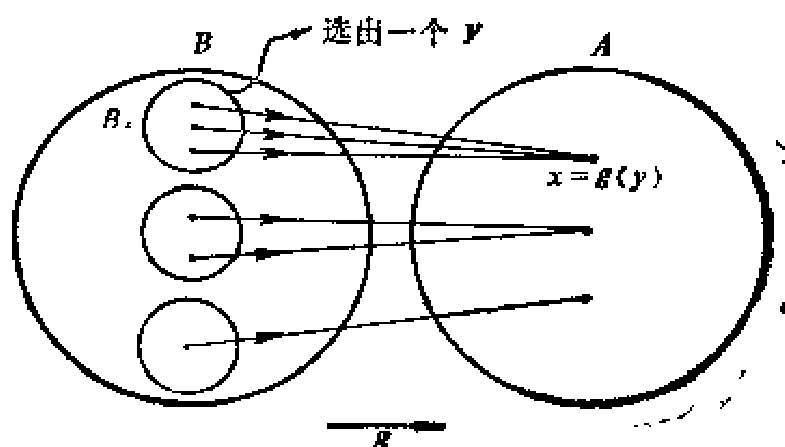


图 21

§5 可数集与一般无穷集

下面我们将谈论一类重要的集合——可数集，这是在数学中常常接触到的概念.

【定义】 当且仅当 $A\preccurlyeq\omega$ 时，说集合 A 是可数的.

例如，任何有限集，自然数集 ω 本身，偶数集 ω_e，ω 与自己的笛卡尔积 $\omega\times\omega$ 都是可数的. 连续统(实数区间 $(0,1)$)，以及任何实数区间(不包括退化的区间 $[a,a]$)都是不可数的.

以下是可数集的另一例子：

【例 1】 正有理数集 $\boldsymbol{Q}^+$ 是可数的，且 $\boldsymbol{Q}^+\approx\omega$.

事实上，$\boldsymbol{Q}^+$ 可表为

$$\boldsymbol{Q}^+=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\,m,\ n\ \text{是正整数}\right\}.$$

如设

$$A=\{(m,n)\mid m,n\ \text{是正整数}\},$$

则显然 $Q^+ \approx A \subset \omega \times \omega \approx \omega$. 于是 $Q^+ \preccurlyeq \omega$. 另一方面，如设

$$B = \left\{ \frac{m}{1} \middle| m \text{ 是正整数} \right\},$$

则显然 $\omega \approx B \subset Q^+$. 于是 $\omega \preccurlyeq Q^+$. 由 Schröder-Bernstein 定理，$Q^+ \approx \omega$. ▮

【定理 8】 可数集的任何子集可数.

证 设 A 可数，即 $A \preccurlyeq \omega$. 如 $B \subset A$，则 $B \preccurlyeq A$. 由传递性，$B \preccurlyeq \omega$. ▮

【定理 9】 可数个可数集的并集可数，这就是说，设集组 M 可数，且 M 的每一成员可数，则 $\bigcup(M)$ 可数.

证 可设 $M \neq \varnothing$，因 $\bigcup(\varnothing) = \varnothing$（第一章，§6，例 1）本来是可数的. 又可设 $\varnothing$ 不是 M 的成员，否则可把它从 M 中弃去，而不影响 $\bigcup(M)$.

因 $M \preccurlyeq \omega$ 且 $M \neq \varnothing$，故由定理 7 的推论，存在从 ω 到 M 的满射 A. 这样，可用集族 $(A_m)_{m\in\omega}$ 诸项的并集 $\bigcup\limits_{m\in\omega} A_m$ 代替 $\bigcup(M)$（第二章，§ 9），以使叙述更方便些.

对于每个 m，$A_m \preccurlyeq \omega$，且因 $A_m \in M$，故 $A_m \neq \varnothing$. 于是，同样由定理 7 的推论，对于每个 $m \in \omega$，存在至少一个（一般不止一个）从 ω 到 A_m 的满射. 为了证明的目的，需要对每个 $m \in \omega$，选出一个这样的满射. 为此，我们将引用选择公理.

设 F 是定义在 ω 上的函数，其中 $F(m)$ 是一切从 ω 到 A_m 的满射的集合. 按选择公理，可从集族 $(F(m))_{m\in\omega}$ 的每一项 $F(m)$ 中，选出一个映射 $g(m)$，组成映射族 $(g(m))_{m\in\omega}$，

就是说，对于每个 $m\in\omega$，$g(m)\in F(m)$，也就是说，$g(m)$ 是从 ω 到 A_m 的一个确定的满射。

最后，如记 $f(m,n)=g(m)(n)$，则因

$$x\in\bigcup_{m\in\omega}A_m\Longrightarrow\exists m\in\omega(x\in A_m)$$

$$\Longrightarrow\exists m,n\in\omega(x=g(m)(n)=f(m,n)),$$

可见 f 是从 $\omega\times\omega$ 到 $\bigcup_{m\in\omega}A_m=\bigcup(M)$ 的满射，故由定理 7 的推论，$\bigcup(M)\preccurlyeq\omega\times\omega$，从而 $\bigcup(M)\preccurlyeq\omega$。 ∎

定理 9 包括 M 是有限的情况，例如两个可数集的并集可数，三个可数集的并集可数，等等。

【例 2】 整数集 $\boldsymbol{Z}$ 可数，且 $\boldsymbol{Z}\approx\omega$。

事实上，整数集 $\boldsymbol{Z}$ 是正整数集 $\boldsymbol{Z}^+$，负整数集 $\boldsymbol{Z}^-$ 及单集 $\{0\}$ 的并集。显然 $\boldsymbol{Z}^+$，$\boldsymbol{Z}^-$ 与 ω 等势。所以 $\boldsymbol{Z}$ 是三个可数集的并集。故 $\boldsymbol{Z}\preccurlyeq\omega$。但 $\omega\preccurlyeq\boldsymbol{Z}$。故 $\boldsymbol{Z}\approx\omega$。 ∎

【例 3】 有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 可数，且 $\boldsymbol{Q}\approx\omega$。

理由类似。

以下定理说明 ω 在诸无穷集中所占地位。

【定理 10】 任何无穷集有一子集，与 ω 等势。即如 A 是无穷集，则 $\omega\preccurlyeq A$。

【分析】 首先，从 A 中选取 a_0 做第 0 项。其次，从 $A-\{a_0\}$ 中选取 a_1 做第一项。再次，从 $A-\{a_0,a_1\}$ 中选取 a_2 做第二项。一般，从 $A-\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\}$ 中选取 a_n 做第 n 项。由于 A 是无穷的，这样的步骤可以无休止地进行下去，得到 A 的子集 $\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$（各 a_n 互异）与 ω 等势。这就是证明的基本思想。

证 因A是无穷集，故 $A \neq \varnothing$。 设φ是A 的一个选择函数，即对于A的每个非空子集 B，由φ选出的 $\varphi(B) \in B$。需要证明存在一个函数 $a: \omega \to A$，使对于任何的$n \in \omega$，以下的递推公式成立：

$$a(n) = \varphi(A - \operatorname{ran}((a(i))_{i<n}))^{①}, \tag{1}$$

其中 $a(n) \in A - \operatorname{ran}((a(i))_{i<n})$。事实上，在关于$\omega$的第二递推原理(第三章，§8)中，取$A$为取值集，并设递推函数$f$如下定义：对于从 $n \in \omega$ 到A内的任一映射 $t^{(n)}$，

$$f(t^{(n)}) = \varphi(A - \operatorname{ran}(t^{(n)})).$$

为了验证对于任何的 $t^{(n)}$，$f(t^{(n)})$ 有意义，需要证明

$$A - \operatorname{ran}(t^{(n)})$$

非空。 事实上，因 $t^{(n)}$ 是从n 到 $\operatorname{ran}(t^{(n)})$ 上的满射，故 $\operatorname{ran}(t^{(n)}) \preccurlyeq n$。 可见 $\operatorname{ran}(t^{(n)})$ 是有限集(参看§2，定理3)。又因A无穷，故 $A - \operatorname{ran}(t^{(n)}) \neq \varnothing$。现在，取值集$A$和递推函数都已明确，于是根据第二递推原理，可知确实存在函数 $a: \omega \to A$，满足递推公式(1)。

以下证明a是单叶的，即证明当 $m \neq n$ 时，$a(m) \neq a(n)$。事实上，不妨假定 $m < n$。这时，

$$a(m) \in \operatorname{ran}((a(i))_{i<n}),$$

但 $a(n) \in A - \operatorname{ran}((a(i))_{i<n})$。 故 $a(m) \neq a(n)$。既然a是从ω到A的单射，故按定义，$\omega \preccurlyeq A$。 ▮

下面讨论可数集的类型。关于可数集的定义，我们只是说它受制于 ω。 在此定义下，有限集——与某一自然数n等势的集合当然是可数的。另外，与ω等势的集合当然也是可

① 例如，$a(0) = \varphi(A)$，$a(1) = \varphi(A - \{a(0)\})$，$a(2) = \varphi(A - \{a(0), a(1)\})$。

数的. 但是,除与 ω 等势的集合以外,还有没有其他可数的无穷集呢? 这个问题需要回答:

【推论】 A 可数 $\Longleftrightarrow$ A 有限或 $A\approx\omega$.

证 $\Leftarrow$部分显然. 以下证$\Rightarrow$部分. 设 A 可数, 即设 $A\preccurlyeq\omega$. 或者 A 有限,或者 A 无穷. 当 A 无穷时,由定理 10, $\omega\preccurlyeq A$. 于是由 Schröder-Bernstein 定理, $A\approx\omega$. ∎

当且仅当 $A\approx\omega$ 时,说 A 是无穷可数的. 这样,可数集有且只有以下两种类型: 有限集和无穷可数集. 无穷可数集的例子有自然数集 ω 本身, 它与自己的笛卡尔积 $\omega\times\omega$, 整数集 $\boldsymbol{Z}$, 有理数集 $\boldsymbol{Q}$, 等等.

由于 ω 受制于任何无穷集, 我们可以把无穷可数集看作是元素"最少"的无穷集.

作为本节的结尾, 我们返回头来继续讨论有限集与无穷集的区别问题. 按 §2 的定义,有限集指的是能与某个自然数等势的集合, 无穷集指的是不能与任何自然数等势的集合. §2 的定理 4 指明,如一集合是有限集, 则它不能与其任何真子集等势. 与此等价的命题(定理 4 的推论)是, 能与其某一真子集等势的集合必是无穷集. 在 §2,并未确立这一命题的逆命题. 现在, 在引入选择公理的基础上, 我们证明了定理 10. 利用定理 10 就不难证明这个逆命题了:

【定理 11】 如 A 是无穷集, 则 A 与其某一真子集等势.

证 设 A 是无穷集. 由定理 10, $\omega\preccurlyeq A$, 即存在某一单射 $g:\omega\to A$. 从 A 中弃去 $g(0)$, 得到它的一个真子集 $B=A-\{g(0)\}$. 用以下方式在 A 与 B 间构造一一对应 ϕ: 对于每个 $g(n)\in A$, 让 $g(n^+)\in B$ 与之对应,对于其他的 $x\in A$, 让同一个 $x\in B$ 与之对应 (参看图 22). 这就是说, 设 ϕ:

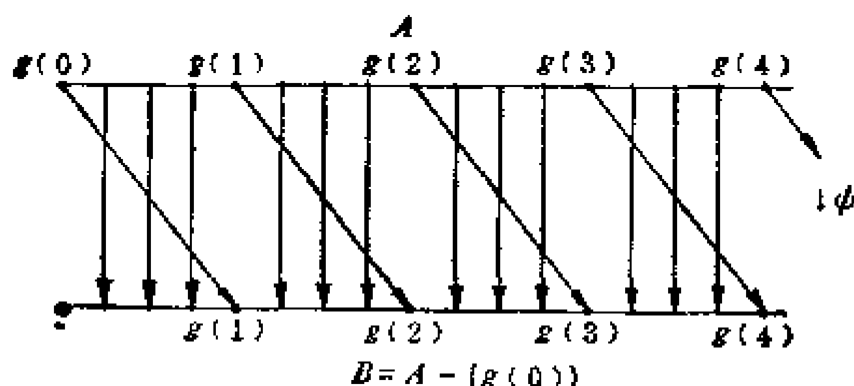


图　22

$A \to B$，其中

$$\phi(x) = \begin{cases} g(n^+), & \text{当 } x = g(n) \quad (n \in \omega), \\ x, & \text{当 } x \notin \operatorname{ran}(g). \end{cases}$$

则 ϕ 是双射。可见 $A \approx B$。 ▮

把定理 4 的推论和定理 11 结合起来，可写：

A 是无穷集，当且仅当 A 与其某一真子集等势。

与此等价的命题是：

A 是有限集，当且仅当 A 不能与其任何真子集等势。

这样，能不能与其真子集等势，是无穷集和有限集的根本区别。有些书籍就用这作为无穷集与有限集的定义。

习　题　四

1．§1 的例 3 给出了一个从 $\omega \times \omega$ 到 ω 上的双射．试证等式

$$f(m, n) = 2^m(2n+1) - 1$$

同样给出一个从 $\omega \times \omega$ 到 ω 上的双射．

2．试证：如 $A \approx B$（即存在从 A 到 B 上的双射），且 A 至少含有两个不同的元素，则从 A 到 B 上的双射不唯一．

3．验证：

i) $2\approx\{3, 4\}$. ii) $4\approx\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)))$.

4. 证明 §1 末尾的性质 I—III.

5. 在第 4 题的性质 II 中，如去掉题设中的条件

$$A\cap C = B\cap D = \varnothing,$$

结论还一般成立吗？举出反例.

6. 证明 $A\approx B \Longrightarrow A^C\approx B^C$.

[提示：设 F 是从 A 到 B 上的双射. 定义 $G: A^C\longrightarrow B^C$ 如下：对于任何的 $f\in A^C$, $G(f) = F\circ f$. 可证 G 是从 A^C 到 B^C 上的双射.]

7. 证明 $C\approx D \Longrightarrow A^C\approx A^D$.

8. 试给出一个从实数区间 $[0, 1]$ 到 $[a, b]$（其中 $a<b$）上的双射. 类似地给出从 $[0, 1)$ 到 $[a, b)$ 上，从 $(0, 1]$ 到 $(a, b]$ 上，以及从 $(0, 1)$ 到 (a, b) 上的双射.

9. 对以下指定的实数区间 A, B, 试给出从 A 到 B 上的双射：

i) $A = (0, 1]$, $B = [0, 1)$. ii) $A = (0, 1]$, $B = (0, 1)$.

iii) $A = [0, 1]$, $B = (0, 1]$.

[提示：关于 ii)，可取

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & \text{对于 } x = \dfrac{1}{n}, \text{ 其中 } n \text{ 是正整数;} \\ x, & \text{对于其他的 } x\in(0, 1]. \end{cases}$$]

10. i) 试构造一个从区间 $(0, 1)$ 到正实数集 $\boldsymbol{R}^+$ 上的双射，使有理数对应有理数，无理数对应无理数.

ii) 试构造一个满足上述要求的从区间 $(0, 1)$ 到实数集 $\boldsymbol{R}$ 上的双射.

[提示：关于 i)，$(0, 1) = \left(0, \frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{2}, 1\right)$, $\boldsymbol{R}^+ = (0, 1]\cup(1, +\infty)$. 可分别写出从 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 到 $(1, +\infty)$ 上的和从 $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ 到 $(0, 1]$ 上的适当双射.]

11. 设 $X\neq\varnothing$, 对于任何从 X 到 X 内的映射 f, g, 定义

$$fRg \Leftrightarrow \text{ran}(f) = \text{ran}(g).$$

试证：i) R 是 X^X 中的等价关系. ii) 商集 $X^X/R \approx \mathscr{P}(X) - \{\varnothing\}$.

[提示：关于 ii)，可定义 $F: X^X/R \longrightarrow \mathscr{P}(X) - \{\varnothing\}$ 如下：对于任何的 $f \in X^X$，$F([f]_R) = \text{ran}(f)$. 试证 F 是从 X^X/R 到 $\mathscr{P}(X) - \{\varnothing\}$ 上的双射.]

12. 证明两个有限集的并仍是有限集.

13. 证明两个有限集的笛卡尔积仍是有限集.

14. 设 A 是有限集，且其元素个数 $N(A) = n$，则 A 的幂集 $\mathscr{P}(A)$ 的元素个数 $N(\mathscr{P}(A)) = 2^n$（这里 2^n 按第三章，§7 的意义）. 试用归纳原理证明之.

[注：按 §1，例 5，$\mathscr{P}(A) \approx 2^A$（这里 2^A 指从 A 到 2 内一切映射的集合）. 故 $N(2^A) = 2^{N(A)}$.]

15. 设给定 $n \in \omega$. 试证一切 $\geqslant n$ 的自然数组成的集合 $T_n = \{m \in \omega | m \geqslant n\}$ 是无穷集.

16. 试用归纳原理证明，如集组 M 有限，且 M 的每一成员是有限集，则并集 $\bigcup(M)$ 是有限集.

17. 设 A, B 是有限集且 $N(B) < N(A)$. 试证任何从 A 到 B 内的映射 $f: A \longrightarrow B$ 都不能是单射.

[注：这性质常被称为"抽屉原则"(或"鸽窠原则")，可比喻为：设自然数 $m < n$. 如把 n 个球(鸽子)放进 m 个抽屉(窠)，那么至少要有两个球(鸽子)放进同一抽屉(窠).]

18. 证明 $A \preccurlyeq C \wedge B \preccurlyeq D \Longrightarrow A \times B \preccurlyeq C \times D$.

19. 证明 §3 的定理 6 与定理 6′ 等价.

20. Schröder-Bernstein 定理（§3，定理 6）的另一证法：设 f, g 分别是从 A 到 B 内的及从 B 到 A 内的单射，如下递推地定义序列 $(C_n)_{n\in\omega}$：

$$C_0 = A - g(B),$$

$$C_{n+1} = g(f(C_n)),$$

(参看图 23). 如记 $D_n = f(C_n)$，则同时得到序列 $(D_n)_{n\in\omega}$，其中对于

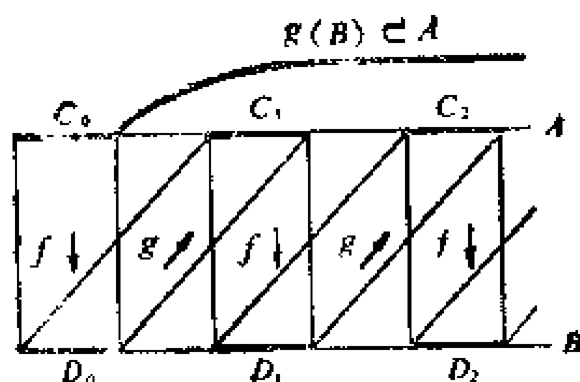


图 23

每个 $n\in\omega$，$C_{n+1}=g(D_n)$。设映射 $h: A\longrightarrow B$ 如下定义：

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & \text{对于 } x\in\bigcup_{n\in\omega} C_n, \\ g^{-1}(x), & \text{对于其他的 } x\in A. \end{cases}$$

可分别证明 $h\restriction\bigcup_{n\in\omega} C_n$ 是从 $\bigcup_{n\in\omega} C_n$ 到 $\bigcup_{n\in\omega} D_n$ 上的双射，$h\restriction\left(A-\bigcup_{n\in\omega} C_n\right)$ 是从 $A-\bigcup_{n\in\omega} C_n$ 到 $B-\bigcup_{n\in\omega} D_n$ 上的双射。请读者补出证明的细节。

21．用归纳原理证明上题中的诸 C_n 两两不相交，从而证明诸 D_n 也两两不相交。

22．试用归纳原理证明关于有限集族的选择公理：对于任何的自然数 $n>0$，设集族 $(A_i)_{i\in n}$ 的各项 $A_i\neq\varnothing$，则存在族 $(a_i)_{i\in n}$，使对于每个 $i\in n$，$a_i\in A_i$。

23．证明以下命题与选择公理等价：对于任何关系 R，存在一个函数 $F\subset R$，使 $\mathrm{dom}(F)=\mathrm{dom}(R)$。

〔提示：1）设选择公理成立．对于关系 $R\neq\varnothing$，设 G 是 $\mathrm{ran}(R)$ 的一个选择函数．如下定义函数 F：$F(x)=G(\{y\mid xRy\})$．可证 F 符合命题的要求． 2)设题中命题成立．给定集族 $(A_i)_{i\in I}$，其中 $I\neq\varnothing$ 且每个 $A_i\neq\varnothing$． 看关系 $R=\{(i,x)\mid i\in I\wedge x\in A_i\}$． 由命题可推出存在族

$(a_i)_{i\in I}$，其中对于每个 i，$a_i \in A_i$.]

24．证明以下命题与选择公理等价：设给定集族 $(B_i)_{i\in I}$，其中 $I\neq\varnothing$，每个 $B_i\neq\varnothing$，且诸 B_i 两两不相交，则存在一个集合 S，它与每个 B_i 的交集 $S\cap B_i$ 是一个单集.

[提示：1）设选择公理成立．于是存在族 $(b_i)_{i\in I}$，使对于每个 $i\in I$，$b_i\in B_i$. 记 $S=\operatorname{ran}(b)$，可证 $S\cap B_i=\{b_i\}$. 2)设命题成立，并设给定集族 $(A_i)_{i\in I}$，其中 $I\neq\varnothing$ 且每个 $A_i\neq\varnothing$. 设 $B_i=\{(i,x)|x\in A_i\}$，则每个 $B_i\neq\varnothing$ 且集族 $(B_i)_{i\in I}$ 诸项两两不相交．按命题，存在集合 S，使对于每个 $i\in I$，$S\cap B_i$ 是单集 $\{(i,x)\}$，其中 $x\in A_i$. 为了排除 S 中可能出现的超出诸 B_i 的多余元素，设 $a=S\cap\bigcup\limits_{i\in I}B_i$. 可证 a 是定义在 I 上的函数，且每个 $a(i)\in A_i$.]

25．对于任给的非零自然数 n 及有限族 $(A_i)_{i<n}$，其中每个 $A_i\approx\omega$，求证 $\mathop{\times}\limits_{i<n}A_i\approx\omega$. [提示：可对 n 引用归纳原理．]

26．1）证明对于任给的非零自然数 n，由自然数组成的一切 n 项序列 $(m_i)_{i<n}$（每个 $m_i\in\omega$）的集合与 ω 等势.

2）证明由自然数组成的一切有限序列的集合与 ω 等势．（注意，由自然数组成的一切序列的集合与连续统 $(0,1)$ 等势．）

27．1）证明对于任给的自然数 n，以有理数为系数的 n 次多项式的集合与 ω 等势.

2）证明代数数（有理系数多项式的根）的集合与 ω 等势.

28．证明由实数轴上的某些两两不相交的区间（非退化的有限或无限的）组成的集合总是可数的.

[提示：注意，在两个不同实数之间必存在有理数，在任何实数的右方（左方）必存在有理数．]

29．设 f 是定义在实数区间 $[a,b]$ $(a<b)$ 上的实值函数．证明，如 f 单调，则 f 的间断点的集合可数．[提示：注意，单调函数 f: $[a,b]\longrightarrow\boldsymbol{R}$ 的间断点 x 在 $\boldsymbol{R}$ 上形成一个区间 $(f(x-0),f(x+0))$（或 $(f(x+0),f(x-0))$），这些区间两两不相交．]

30. 证明，如集合 A，B 都与连续统$(0,1)$等势，则 $A\cup B$ 也与连续统等势.

31. 证明，数平面 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 等势. [提示：$\boldsymbol{R}\approx(0,1)\approx 2^{\omega}$. 设 f 是从 $\boldsymbol{R}$ 到 2^{ω} 的一个双射. 记 $f(x)=(a_i^x)_{i\in\omega}$，其中 $a_i^x=0$ 或1. 设 g：$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\longrightarrow 2^{\omega}$ 如下定义：$g(x,y)=(b_i^{xy})_{i\in\omega}$，其中

$$b_i^{xy}=\begin{cases}a^x_{\frac{i}{2}}, & \text{当 } i \text{ 是偶数,}\\ a^y_{\frac{i-1}{2}}, & \text{当 } i \text{ 是奇数.}\end{cases}$$

可证 g 是从 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 到 2^{ω} 上的双射.]

32. 证明，如集合 A，B 都与连续统等势，则 $A\times B$ 也与连续统等势.

33. 证明，如集合 A 与连续统等势，集合 B 可数，则 $A\cup B$ 与连续统等势.

34. 证明，如集合 A 与连续统等势，集合 B 可数且 $B\neq\varnothing$，则 $A\times B$ 与连续统等势.

第五章 序 集

§1 序 集

顺序问题是数学的最基本问题之一．数学中不少问题可以归结为顺序问题．最早的也是最习见的顺序是自然数集 ω 中的顺序(见第三章)．在自然数集的基础上建立起来的有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 和实数集 $\boldsymbol{R}$ 同样具有各自的顺序．这些顺序中的小于($<$)关系都具有三歧性和传递性(参看第三章，§4,定理7,8)．在近代数学中，人们把顺序概念推广到一般的集合上去，同时，为了应用面更加广泛，把顺序所应满足的条件也放宽了．

【定义】设给定集合 A 和 A 中一个关系 R．当且仅当对于任何的 $x, y, z \in A$，

1)（自反性）xRx，

2)（反对称性）$(xRy)\wedge(yRx)) \Rightarrow x=y$，

3)（传递性）$(xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow xRz$，

说 R 是集合 A 的一个偏序，并说 (A, R) 是一个序集．

这里序集 (A, R) 指的是一个序偶，其第一坐标 A 是给定的集合，其第二坐标 R 是 A 中满足定义中条件1)，2)，3)的偏序．通俗地说，(A, R) 指的是带有偏序 R 的集合 A.

【例1】 空集 $\varnothing$ 中唯一的关系是 $\varnothing$，且 $(\varnothing, \varnothing)$ 是序集．

【例2】 单集 $\{a\}$ 中唯一的非空关系是等于关系“$=$”，且

$(\{a\},=)$ 是序集.

【例 3】 在任何集合中，等于关系“$=$”是一个偏序，同时，由自反性，等于关系是这集合的任何偏序的子集.

【例 4】 按照第三章，§ 4 关于自然数的$\leqslant$的规定，$(\omega,\leqslant)$ 是序集.

【例 5】 (包容序)设给定集组 M. 按第一章，§ 4 的注，M中的包容关系$\subset$是M的一个偏序，名叫包容序.

包容序是数学中常被考虑的偏序. 作为数集的顺序概念(例如ω中的$\leqslant$)的推广，一般偏序概念定义中的条件 1)，2)，3) 也主要是从第一章，§ 4 的注中所述包容序的性质 1)，2)，3) 启发出来的. 应该看到一般的偏序概念同数集的顺序概念的区别. 数集(例如 ω)中的顺序具有这样的性质：对于集合中任何两个元素 x,y 来说，$x\leqslant y$ 与 $y\leqslant x$ 至少有一成立. 一般的偏序就不见得具有这个性质. 例如，例 5 已申明任一集组中的包容关系$\subset$是一个偏序，但对于任给集组中的任何两个集合来说，就不一定能被$\subset$联系起来. 具体地说，看序集$(\mathscr{P}(3),\subset)$(参看图 24，图中一切点子组成 $\mathscr{P}(3)$). 在此序集中，固然 $\varnothing\subset\varnothing$，$\varnothing\subset\{2\}$，$\{2\}\subset\{2\}$，$\{2\}\subset\{0,1,2\}$，等等，但 $\{1\}$ 和 $\{0,2\}$，$\{0,2\}$和$\{0,1\}$，等等就不能被$\subset$联系起来.

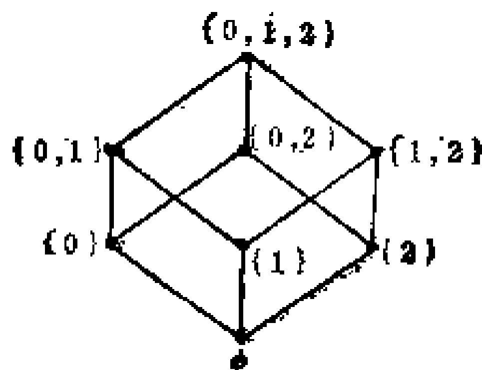


图 24

尽管一般偏序不同于数集中的$\leqslant$，我们还是按照通常的习惯，今后将用记号$\leqslant$来记偏序．但读者应该记住，这同数集中的$\leqslant$是有区别的．数集(例如ω)中任何两个数都可通过$\leqslant$进行比较，而一般序集$(A,\leqslant)$就不一定具有这个性质．

【定义】 设给定序集$(A,\leqslant)$．对于$x, y\in A$，当且仅当$x\leqslant y$与$y\leqslant x$至少有一成立时，说x与y可较．

例如在序集$(\mathscr{P}(3),\subset)$中，$\varnothing$和$3=\{0,1,2\}$与$\mathscr{P}(3)$中一切集合可较，$\{2\}$与$\varnothing$，$\{2\}$，$\{0,2\}$，$\{1,2\}$，$\{0,1,2\}$可较，$\{1,2\}$与$\{0\}$，$\{0,1\}$，$\{0,2\}$不可较．

【定义】 设给定序集$(A,\leqslant)$．当且仅当A的任何两个元素可较时，说$(A,\leqslant)$是全序集(或线性序集)，并说偏序$\leqslant$是A的一个全序(或线性序)．

例如，上面例1中的$(\varnothing,\varnothing)$，例2中的$(\{a\},=)$，例4中的$(\omega,\leqslant)$都是全序集，而$(\mathscr{P}(3),\subset)$就不是全序集．

以下引入$<,\geqslant,>$三个记号：对于序集$(A,\leqslant)$及$x,y\in A$，当且仅当$x\leqslant y$且$x\neq y$时，就记$x<y$．此外，用$\geqslant$和$>$分别记关系$\leqslant$和$<$的逆．

不难验证，本章关于记号$\leqslant$的规定同第三章关于同样记号的规定是一致的，即

$$x\leqslant y\Longleftrightarrow x<y\vee x=y①.$$

在第三章，§4，我们看到，自然数集ω中的$<$关系具有：

1）(三歧性)对于任何的$n, m\in\omega$，

① 证明如下：$x=y\vee x<y\Leftrightarrow x=y\vee(x\leqslant y\wedge x\neq y)$
$\Leftrightarrow(x=y\vee x\leqslant y)\wedge(x=y\vee x\neq y)\Leftrightarrow x=y\vee x\leqslant y$
$\Leftrightarrow x\leqslant y$($\Rightarrow$由自反性)

$$n = m,\ n < m,\ m < n$$

恰好有一情形成立；

2)（传递性）对于任何的 $n, m, l \in \omega$,

$$n < m \wedge m < l \Rightarrow n < l.$$

那么，一般偏序≤中的<具有这两个性质中的哪些部分性质呢？

【注 1】 偏序≤中的<具有以下性质：对于所论集合的任何元素 x, y, z,

1)（半三歧性）$x = y$, $x < y$, $y < x$ 至多有一情形成立；

2)（传递性）$x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$.

事实上，1) 按照上面关于<的规定，$x < y$, $y < x$ 分别与 $x = y$ 不相容．此外，假如 $x < y$（即 $x \leqslant y \wedge x \neq y$）与 $y < x$（即 $y \leqslant x \wedge x \neq y$）相容，则根据≤的反对称性，$x = y$ 就与 $x \neq y$ 相容，这是不可能的．2) 设 $x \leqslant y \wedge x \neq y$，并设 $y \leqslant z$（不必管 $y \neq z$），则由≤的传递性，得到 $x \leqslant z$．但 $x \neq z$，否则按反对称性，将有 $x = y$，与 $x \neq y$ 矛盾．∎

由注 1 可知，一般偏序≤中的<除三歧性的另一半——$x = y$, $x < y$, $y < x$ 至少有一成立——以外，具有 ω 中<的三歧性和传递性的其余所有性质．

以下的注 2 说明全序≤中的<具有全部的三歧性和传递性．

【注 2】 设≤是集合 A 的一个偏序．≤是全序当且仅当对于任何 $x, y \in A$,

$$x = y,\ x < y,\ y < x$$

至少有一成立.

这是极易验证的(习题五,2).

最后,我们对序集的记法作一声明. 按照规定,应该用序偶 $(A, \leqslant)$ 来记一个序集,其中 A 是给定的集合,$\leqslant$ 是其中一个偏序. 但为了简便,在不致引起误解的情况下,我们单用 A 来记序集 $(A, \leqslant)$.

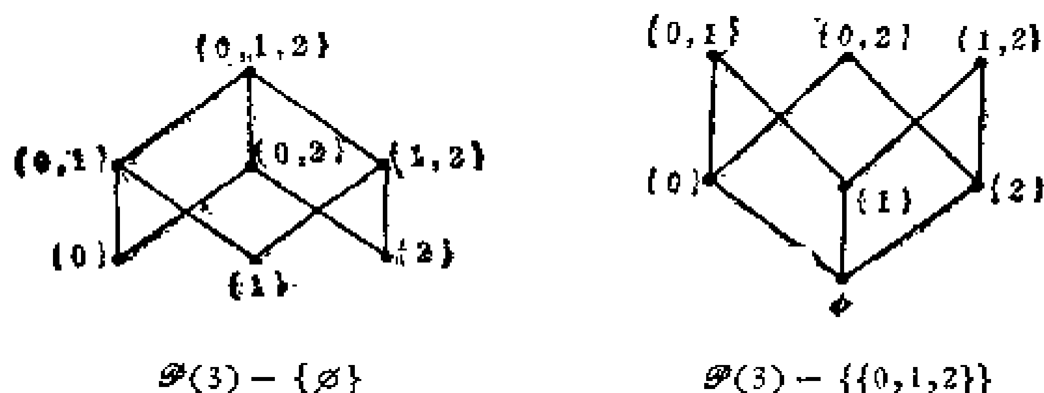
§2 良 序 集

上节已经看到,一般序集的任二元素不一定可较,而全序集的任二元素必定可较.在各种全序集中,自然数集 ω 还具有一个特性: 它满足最小数原理(第三章,§5,定理9). 正是利用 ω 的这一重要性质,我们证明了第二归纳原理(第三章,§8,定理11). 其他的全序集就不一定具有这个性质,例如整数集 $\boldsymbol{Z}$,有理数集 $\boldsymbol{Q}$,实数集 $\boldsymbol{R}$ 都不具备最小数原理. 本节将在一般的序集中考虑与最小数原理相应的问题. 为此,先要明确什么是一个序集的最小(大)元:

【定义】 设给定序集 A. 当且仅当存在 $a \in A$,使对于任何的 $x \in A$,都有 $a \leqslant x$ $(x \leqslant a)$,说 a 是 A 的最小元(最大元).

这里值得注意的是: (1) A 的最小(大)元 a 必须是 A 的元素; (2) A 的最小(大)元 a 起码要与 A 的每一元素可较.例如,在上节关于 $\mathscr{P}(3)$ 的例中,$\varnothing$ 是 $\mathscr{P}(3)$ 的最小元,$\{0, 1, 2\}$ 是 $\mathscr{P}(3)$ 的最大元. 又如,去掉 $\varnothing$,则 $\mathscr{P}(3)-\{\varnothing\}$ 就没有最小元; 去掉 $\{0, 1, 2\}$,$\mathscr{P}(3)-\{\{0, 1, 2\}\}$ 就没有

最大元(参看图 25).



$\mathscr{P}(3)-\{\varnothing\}$　　　　$\mathscr{P}(3)-\{\{0,1,2\}\}$

图 25

【注 1】 如序集 A 的最小(大)元存在,则必唯一.

事实上,如 a, b 都是 A 的最小(大)元,则按定义, $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant a$. 于是由 $\leqslant$ 的反对称性, $a=b$. ▮

以下是自然数集 ω 的最小数原理在概念上的推广:

【定义】 设给定序集 A. 当且仅当 A 的每个非空子集有最小元,说 A 是良序集.

这里需要作些解释. 当我们说"B 是序集 A 的子集"时,指的是 (1) $B\subset A$; (2) B 也作为序集看待,其偏序与序集 A 的偏序一致. 以后我们说"全序集的子集","良序集的子集",都是这样的意思.

作为简单的例示, $(\varnothing,\varnothing)$,$(\{a\},=\}$, $\{\omega,\leqslant\}$都是良序集. 负整数集 Z^- 按其原来的顺序不是良序集,但把原来的顺序颠倒过来,得到新的序集就是良序集. 有理数集 Q 按其原来的顺序也不是良序集,但从第四章, § 5, 例 3, 我们知道,存在从 ω 到 Q 上的双射. 如对 Q 的元素按照 ω 中对应的元素的顺序而重新排列顺序, 那么, 所得到的序集就是良序集. 关于 ω 与自己的笛卡尔积 $\omega\times\omega$, 如通过第四章, § 1,

例 3 中从 $\omega\times\omega$ 到ω上的双射，按ω中的顺序规定 $\omega\times\omega$ 中的顺序，$\omega\times\omega$ 就成为良序集.

在以上关于 $\mathbf{Z}^-,\mathbf{Q},\omega\times\omega$ 的例子中，得到的良序集都是和ω同一类型①．读者应知，良序集的类型多种多样．如上面举出的良序集 $(\varnothing,\varnothing),(\{a\},=)$ 就不是同一类型，它们的每一个也不与ω同一类型．又如，带有全序的任何有限集是良序集，它也不与ω同一类型．以下进一步举出其他类型的例子．在这些例子中，元素之间的顺序都按有理数集 $\mathbf{Q}$ 中原来的顺序.

【例 1】　序集 $\left\{1-\frac{1}{n+1}\middle| n\in\omega\right\}\cup\{1\}$ 是良序集(图 26).

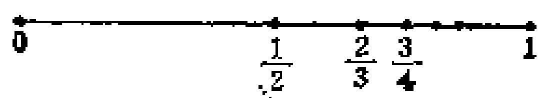


图 26

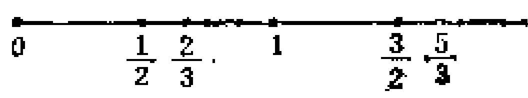


图 27

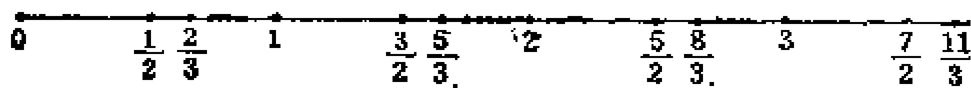


图 28

【例 2】　序集 $\left\{1-\frac{1}{n+1}\middle| n\in\omega\right\}\cup\left\{2-\frac{1}{n+1}\middle| n\in\omega\right\}$ 是良序集(图 27).

【例 3】　序集 $\bigcup\limits_{m\in\omega}\left\{m-\frac{1}{n+1}\middle| n\in\omega\right\}$是良序集(图28).

① 关于良序集的"类型"，在下面 § 4 将重新谈论.

关于 $\omega\times\omega$，除上面赋予它的与ω一致的良序外，还可按照“字典顺序”赋予良序．所谓字典顺序指的是，对于序偶 (n_1, n_2) 和 (m_1, m_2)，如 $n_1<m_1$，就规定 $(n_1,n_2)<(m_1, m_2)$，如 $n_1=m_1$，而 $n_2<m_2$，也规定 $(n_1,n_2)<(m_1,m_2)$．这样得到的良序集和例 3 的良序集同一类型．

在我们对良序集的定义中，并未假定它是全序集．其实后一事实已包括在良序集的定义中，这就是：

【注 2】 良序集必是全序集．

事实上，设A是良序集．对于任何的 $x,y\in A$，A 的子集 $\{x,y\}$ 必有最小元．如 x 是最小元，则 $x\leqslant y$，如 y 是最小元，则 $y\leqslant x$．可见 x,y 总是可较的．

由此可见，偏序——全序——良序是一个比一个要求更严的概念，全序集是其任二元素都可较的序集，良序集是其每一非空子集都有最小元的全序集．

为了给出与良序条件等价的另一实用条件，我们引入“截段”、“前段”两个概念：

【定义】 设给定全序集① A．A 的子集 T 叫做 A 的一个截段，当且仅当

$$\forall x,y\in A(x\in T\wedge y<x\Rightarrow y\in T).$$

A 的截段 T 叫做 A 的真截段，当且仅当 $T\neq A$．

用普通的话说，A 的截段 T 是A的这样的子集，对于T的任何元素 x，比它小的任何 $y\in A$ 仍是T的元素；A的真截段既是A的截段，又是A的真子集．

① 这里的定义也适用于一般的序集，但对于本书来说，只考虑全序集就足够了．

对于任何全序集 A，空集 $\varnothing$ 是 A 的一个截段，A 本身也是 A 的一个截段(非真截段)．这是两种极端情况．又如，设 a 是全序集 A 的一个元素，不难验证，$\{x\in A|x<a\}$ 和 $\{x\in A|x\leqslant a\}$ 都是 A 的截段(习题五，12)．

【定义】 设给定全序集 A，并给定 $a\in A$．称 $s(a)=\{x\in A|x<a\}$ 为 a 在 A 中的前段，称 $\bar{s}(a)=\{x\in A|x\leqslant a\}$ 为 a 在 A 中的弱前段．

上面已经看到，前段 $s(a)$ 和弱前段 $\bar{s}(a)$ 都是 A 的截段．这里，弱前段 $\bar{s}(a)$ 可能与 A 重合(当 a 是 A 的最大元时)，但前段 $s(a)$ 必然是 A 的真截段，这是因为 $s(a)$ 至少不包含 $a\in A$．在一般的全序集中，真截段是比前段更为广泛的概念．例如，在实数集 $\boldsymbol{R}$ 中(按其原来的顺序)，任取 $\xi\in\boldsymbol{R}$，则 $s(\xi)$ 与 $\bar{s}(\xi)$ 都是 $\boldsymbol{R}$ 的真截段，这里，$s(\xi)$ 固然是 ξ 的前段，而 $\bar{s}(\xi)$ 就不是任何实数的严格意义的前段，这是因为，在 ξ 的后面不存在"紧接着"的实数．

以下的定理指明良序集区别于其他全序集的特征——真截段与前段的一致性．

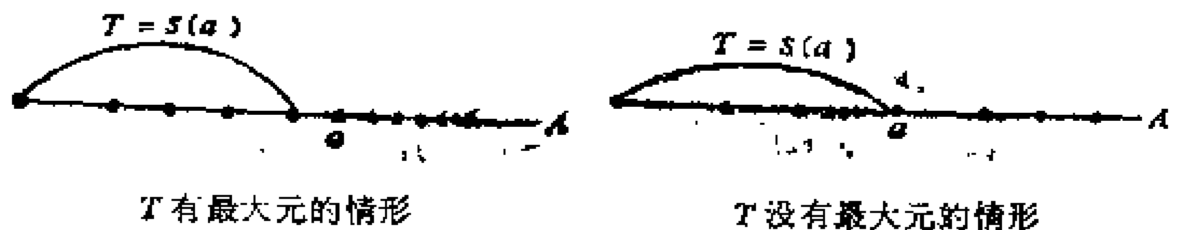
【定理 1】 使全序集 A 成为良序的必要且充分条件：对于 A 的任何真截段 T，存在某个 $a\in A$，使 $T=s(a)$．

证 必要性．设 A 良序，且 T 是 A 的真截段．那么，$A-T\neq\varnothing$．因 A 良序，故可设 a 为 $A-T$ 的最小元．以下证明 $T=s(a)$．事实上，如 $x\in T$，则必有 $x<a$，否则按全序集的三歧性，将有 $a\leqslant x$，从而按截段的定义，$a\in T$，这就与 $a\in A-T$ 矛盾．故此时 $x\in s(a)$．另一方面，根据 a 是 $A-T$ 的最小元，不难由 $x\in s(a)$ 推出 $x\in T$．

充分性．设 A 是全序集且满足定理的条件．看 A 的任一

非空子集 B. 设 T 是 B 在 A 中一切严格下界的集合: $T=\{y\in A|y<$ 一切 $x\in B\}$. 不难验证 T 是 A 的一个真截段.于是根据题设,存在 $a\in A$, 使 $T=s(a)$. 对于任何的 $x\in B$, 必有 $a\leqslant x$, 否则 $x\in s(a)=T$, 这与 $B\cap T=\varnothing$ 矛盾.同时,a 必须属于 B, 否则对于任何的 $x\in B$, 排除了 $a\leqslant x$ 中的等号, 将有 $a<x$, 由此推出 $a\in T=s(a)$, 这也是不对的. 最后得到,a 是 B 的最小元. ∎

定理 1 所揭示的良序集的特征——真截段必是某个前段——可以直观地描述如下: 把全序集 A 的顺序看作是从左向右的.截去 A 中左面一段但不截去全部(即截取一个真截段), 那么, 不论截去的部分 T 有没有最大元, A 中总有一个元素 a, 紧接在这个截段 T 的后面(参看图 29). 良序集而且只有良序集具备这一特征.



T 有最大元的情形　　　T 没有最大元的情形

图 29

§ 3 超限归纳原理和超限递推原理

良序集概念是自然数集 ω 保留最小数原理的推广. 我们知道,自然数集 ω 还具有第一归纳原理(第三章, §2,定理 3). 一般的良序集还保留这一原理吗? 为了对比, 我们把第一归纳原理表述为如下形式:

设 $A\subset\omega$，且满足以下条件：

i) ω 的最小元 0 属于 A，

ii) 对于任何的 $n\in\omega$，由 $n\in A$ 能推出紧接在 n 后面的自然数 n^+ 属于 A，

则 $A=\omega$.

一般的良序集就不保留这一原理．看§2的例1，用W记其中的良序集，并看它的子集 $A=\left\{1-\frac{1}{n+1}\middle| n\in\omega\right\}$．显然，i) W的最小元0属于A，ii) 对于任何的 $1-\frac{1}{n+1}\in A$，在W中紧接在它后面的 $1-\frac{1}{n+2}$ 也属于 A．但是，A 不包含W的元素1，所以 $A\neq W$．读者可以类似地观察一下§2的例2和例3．这说明对一般良序集来说，第一归纳原理的条件不足以把这些良序集的元素全部归纳进去．

另一方面，ω 的第二归纳原理（第三章，§8，定理11）只是靠最小数原理证明的．这样，比照最小数原理定义的良序集就应保留第二归纳原理．对于一般的良序集，我们把这原理叫做超限归纳原理：

【定理 2】（超限归纳原理）设 W 是良序集．对于任何的 $A\subset W$，如 A 满足条件：

$$\forall a\in W(s(a)\subset A\Rightarrow a\in A),\qquad (*)$$

则 $A=W$.

这个定理的证明同 ω 的第二归纳原理的证明一样．

【注】 可以证明（习题五，17），如全序集W的任何满足条件(*)的子集A都与W重合，则W是良序集．与定理2结合，这就是说，对于全序集W来说，超限归纳原理所述的性质与良

序条件等价.

以下考虑递推原理. ω 的第一递推原理(第三章, § 6,定理 10)的结论可以说成: 存在一个函数 $u:\omega\to X$, 除 $u(0)=a$ 外, u 在每个 $n>0$ 的值 $u(n)$ 由 u 在 n^- (紧接在 n 前面的先行者)的值 $u(n^-)$ 所确定: $u(n)=f(u(n^-))$, 其中 $f:X\to X$ 是递推函数.

一般的良序集就不保留这一原理. 这是因为, 一般良序集的元素(如 §2,例 1 和例 2 中的 1,例 3 中的 1, 2, 3, …)可能没有紧接在它前面的元素.

另一方面, ω 的第二递推原理(第三章 § 8, 定理 12)主要是靠 ω 的第二归纳原理(即 ω 的超限归纳原理)证明的. 它可以向一般良序集推广, 这就是:

【定理 3】 (超限递推原理)设给定良序集 W 及任一集合 X. 用 S 记: 对于一切 $a\in W$, 一切函数 t: $s(a)\to X$ 所成的集合:

$$S=\{(t_i)_{i<a}\mid a\in W\wedge \text{每个 } t_i\in X\}①.$$

设给定 $f:S\to X$. 则存在唯一的函数 $u:W\to X$, 使

$$u(a)=f(u\restriction s(a))=f((u_i)_{i<a})②.$$

定理的证明和 ω 的第二递推原理的证明一样.

同 ω 的情形一样, 我们仍把 X 叫做取值集, 把 f: $S\to X$ 叫做递推函数. 对于良序集 W, 只要有了取值集 X 和递推函数 f, 由超限递推原理就可判断存在唯一的满足递推公式

$$u(a)=f((u_i)_{i<a})$$

的函数 $u:W\to X$.

①② 参看第三章, § 8 末尾说明 2) 中的记法.

超限归纳原理和超限递推原理是数学中常被引用的原理．读者在本章后面的理论发展中，就会看到它们发挥的重要作用．

§4　序集的相似·良序集的比较

在§2我们曾提到某两个序集"同一类型"．例如，我们说负整数集 Z^- 按照倒过来的顺序，有理数集 Q 按照第四章，§5，例3所赋予的顺序都和 ω 同一类型，$\omega\times\omega$ 按照"字典顺序"和§2，例3的序集同一类型．当时提出"同一类型"只是一种直观描述．以下引入的"相似"概念就是这种直观描述的正式抽象．

在第四章我们考虑过两个集合的等势，它指的是两集合之间存在双射．以下所谓两序集相似指的是不但在它们之间存在双射，而且在这双射下双方保持顺序一致：

【定义】 设给定序集 $(X,\leqslant_X)$，$(Y,\leqslant_Y)$．当且仅当：

1) $X\approx Y$，即存在从 X 到 Y 上的双射 f，且

2) 对于任何的 $a,b\in X$，

$$a\leqslant_X b\Longleftrightarrow f(a)\leqslant_Y f(b),$$

我们说序集 X，Y 相似，记作

$$X\simeq Y,$$

并说 f 是从 X 到 Y 上的一个相似映射(或相似对应)．

例如，如自然数集 ω 带有自己原来的顺序，集合

$$Y=\left\{1-\frac{1}{n+1}\,\middle|\,n\in\omega\right\}$$

带有有理数集 Q 原来的顺序，则 $\omega \simeq Y$. 相似映射可取为 $f:\omega \to Y$，其中 $f(n) = 1 - \frac{1}{n+1}$. 但良序集 $Z = Y \cup \{1\}$ (§2，例1)不能与 ω 相似(尽管它们等势). 这是因为，如果相似，则与 Z 的最大元 1 对应的应是 ω 的最大元，而后者是不存在的. 又如，如按 R 中原来的顺序，则区间 $(0, 1)$ 与 R 相似. 请读者给出相似映射. 又如，设 $X = \{a, b, c\}$，其中偏序为 $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c)\}$; $Y = \{x, y, z\}$，其中偏序为 $\{(x, x)(y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$，则序集 X 与 Y 相似.

与第四章，§1，定理1相当，我们有：

【定理4】 对于任何的序集 X, Y, Z,

1) (自反性) $X \simeq X$,

2) (对称性) $X \simeq Y \Rightarrow Y \simeq X$,

3) (传递性) $X \simeq Y \wedge Y \simeq Z \Rightarrow X \simeq Z$.

证明是简单的.

相似的定义是对一般序集订立的. 在定义的条件2)中的双向箭头 $\Leftrightarrow$ 不能用单向箭头 $\Rightarrow$ (或 $\Leftarrow$)代替. 这是因为，两个序集 X, Y 即使等势，在一个序集 X (或 Y)里可较的元素，其在另一序集 Y (或 X)里的对应元素不一定可较. 定义的条件2)要求在一方可较的元素，其在另一方的对应元素必须可较，并且保持顺序一致.

由于全序集中的 $<$ 具有完全的三歧性(§1，注2)，问题就简单了. 我们有以下的注释:

【注】 使全序集(特别是良序集) X, Y 相似的必要且充分条件:

1)′ 存在从 X 到 Y 上的满射 f，且

2)′ f 是严格递增的，即对于任何的 $a, b \in X$，

$$a <_X b \Rightarrow f(a) <_Y f(b).$$

这是容易验证的．注意这里条件 1)′ 只要求 f 是满射，条件 2)′ 中的箭头只要求单方的 $\Rightarrow$．

上面，我们谈论相似性，是面向一般序集的．但是，对于本书来说，我们的兴趣主要在良序集．以下考虑与良序集的相似性有关的问题．

【引理 1】 设 X 是良序集且 f 是 X 到其某一子集上的一个相似映射，则对于任何的 $a \in X$，$a \leqslant f(a)$．

证 用超限归纳原理(§3，定理 2)．记

$$A = \{x \in X \mid x \leqslant f(x)\}.$$

对于 $a \in X$，设 $s(a) \subset A$，即设对于一切 $x < a$，都有 $x \leqslant f(x)$．我们证明 $a \in A$，即证明 $a \leqslant f(a)$．事实上，如 $f(a) < a$，则在归纳假设中，取 $x = f(a)$，得到 $f(a) \leqslant f(f(a))$．另一方面，由 $f(a) < a$ 及 f 的严格递增性(看前面的注)，得到 $f(f(a)) < f(a)$． 这就与 $<$ 的三歧性矛盾．可见 $a \leqslant f(a)$．按超限归纳原理，$A = X$．这就是引理的结论． ∎

引理 1 的直观意义是，一个良序集到其子集上的相似映射是不能后退的．一般的全序集不见得具有这个性质．请读者举出反例．

【引理 2】 任何良序集不能与其真截段相似．

证 设 X 是良序集，并设 f 是从 X 到其真截段 T 上的相似映射．由于 X 是良序集，故按 §2，定理 1，T 必是某个 $a \in X$ 的前段 $s(a)$：$T = s(a)$．于是 $f(a) \in s(a)$，即 $f(a) < a$，这就与引理 1 矛盾． ∎

请读者对引理 2 举出非良序的全序集的反例。

【定理 5】 设给定良序集 X 和 Y。如存在从 X 到 Y 上的相似映射 f，则 f 是唯一的相似映射。

证 设 f，g 都是从 X 到 Y 上的相似映射，则 $g^{-1}\circ f$ 是从 X 到自己上面的相似映射。按引理 1，对于任何的 $a\in X$，$a\leqslant (g^{-1}\circ f)(a)$。在不等式两边使用相似映射 g，得到 $g(a)\leqslant f(a)$。同理可得 $f(a)\leqslant g(a)$。故 $f(a)=g(a)$。 ▮

请读者对定理 5 举出非良序的全序集的反例。

下面的定理告诉我们任何两个良序集都能以相似为标准进行比较：

【定理 6】（良序集的可较原理）对于任何两个良序集 X 和 Y，以下三种情形恰好有一种成立：

1）X 与 Y 相似，

2）X 与 Y 的某一真截段相似，

3）Y 与 X 的某一真截段相似。

证 由引理 2 不难推出三种情形两两不相容。以下证明三种情形至少有一成立。如 X，Y 中有一为空集，这结论显然成立。以下设 X，Y 都非空集，并假定 X，Y 的每一个都不与另一个的真截段相似。只要在此假定下，证明 X 与 Y 相似就可以了①。我们利用超限递推原理来构造相似映射。

对于任何的 $a\in X$ 和任何的从 $s(a)$ 到 Y 内的映射 t，如下定义递推函数 f：

i）当 $\operatorname{ran}(t)\neq Y$，令 $f(t)$ 是 $Y-\operatorname{ran}(t)$ 的最小元（参

---

① 就是说，证明 $\neg 2)\wedge\neg 3)\Rightarrow 1)$。这同 $\neg 1)\wedge\neg 3)\Rightarrow 2)$ 和 $\neg 1)\wedge\neg 2)\Rightarrow 3)$ 等价。

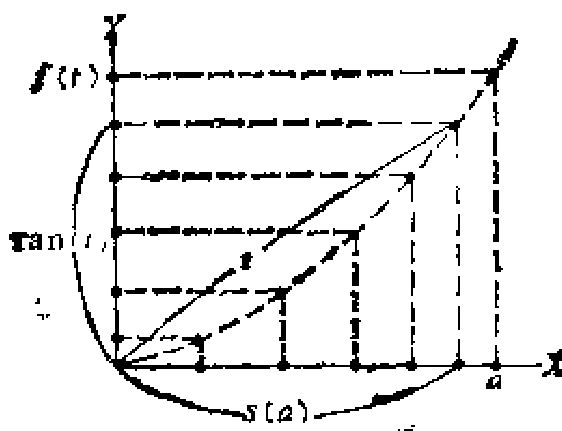


图 30

看图 30)①.

ii) 当 $\operatorname{ran}(t)=Y$，令 $f(t)$ 是 Y 的最小元②.

按超限递推原理，存在从 X 到 Y 内的函数 u，使

$$u(a)=f(u\restriction s(a)).$$

以下证明 u 是从 X 到 Y 上的相似映射.

A) u 在 X 上严格递增. 这只要证明对任何的 $a\in X$，

$$\forall b<a(u(b)<u(a)) \tag{1}$$

就可以了. 用超限归纳原理：设

$$\forall b<a(\forall c<b(u(c)<u(b))), \tag{2}$$

即设 u 在 $s(a)$ 上严格递增. 这时 $\operatorname{ran}(u\restriction s(a))\neq Y$，否则按上面的注中给出的良序集相似的条件，$u\restriction s(a)$ 就是从 X 的真截段 $s(a)$ 到 Y 上的相似映射，与最初的假设不合. 同

① 为了同下面的函数 u 联系，我们把函数 t 的图象简单化了. 其实在定义中，t 不一定递增，$\operatorname{ran}(t)$ 也不一定是 Y 的截段.

② 这里是为了完全确定函数 f 才规定 ii) 的. 其实，对于所需要的相似映射 u 来说，这一规定是多余的. 请看下面的推证.

理，$\mathrm{ran}(u\upharpoonright s(b))\neq Y$. 于是 $u(a)$ 与 $u(b)$ 只能按 f 的定义中的 i) 来取值：$u(a)$ 是 $Y-\mathrm{ran}(u\upharpoonright s(a))$ 的最小元，$u(b)$ 是 $Y-\mathrm{ran}(u\upharpoonright s(b))$ 的最小元. 因 $Y-\mathrm{ran}(u\upharpoonright s(a))\subset Y-\mathrm{ran}(u\upharpoonright s(b))$，故 $u(b)\leqslant u(a)$. 但 $b\in s(a)$，故 $u(b)\in\mathrm{ran}(u\upharpoonright s(a))$，而与此同时，$u(a)\in Y-\mathrm{ran}(u\upharpoonright s(a))$，所以$u(b)\neq u(a)$. 这样，我们就由假设(2)推出了 $u(b)<u(a)$. 按超限归纳原理，对于任何的 $a\in X$，(1) 成立.

B) ran(u) 是 Y 的一个截段. 设 $y\in\mathrm{ran}(u)$，我们证明对于 Y 中任何的 $z<y$，都有 $z\in\mathrm{ran}(u)$. 事实上，对于所说的 z，看集合

$$M=\{b\in X\mid z\leqslant u(b)\}.$$

按假设，存在 $a\in X$，使 $y=u(a)$，从而 $z<u(a)$，可见 $a\in M$，故 $M\neq\varnothing$. 设 b_0 是M的最小元. 我们证明 $u(b_0)=z$. 事实上，由 $b_0\in M$，知 $z\leqslant u(b_0)$. 另一方面，$z\notin\mathrm{ran}(u\upharpoonright s(b_0))$，否则存在 $b_1<b_0$，使 $u(b_1)=z$，从而 $b_1\in M$，与 b_0 是 M 的最小元矛盾. 故 $z\in Y-\mathrm{ran}(u\upharpoonright s(b_0))$. 但根据类似于 A) 中的理由，$u(b_0)$ 是 $Y-\mathrm{ran}(u\upharpoonright s(b_0))$ 的最小元，可见 $u(b_0)\leqslant z$. 将此不等式与上面已证的不等式 $z\leqslant u(b_0)$ 结合起来，得到 $u(b_0)=z$，可见 $z\in\mathrm{ran}(u)$.

C) $\mathrm{ran}(u)=Y$. 事实上，ran(u) 不能是Y的真截段，否则 u 就是从X到Y的真截段上的相似映射，与最初的假设不合.

最后，因前面注中给出的良序集相似的条件全部被满足，故 $X\simeq Y$. ∎

§5 良序化原理

良序化原理说的是，对于一个不带偏序（或虽带偏序但不予考虑）的集合，总可赋予它一个良序.

为了证明这一原理，我们先作一些非正式的观察. 设给定集合 A. 如 $A=\varnothing$，则偏序 $\varnothing$ 就使它成为良序集. 以下设 $A\neq\varnothing$，并为叙述的方便，索性把 A 看成无穷集. A 是否能良序化固然尚未证明，但它总有能良序化的子集，例如任取 $a\in A$，则 $(\{a\},=)$ 就是一个良序化子集. 现在考虑一切良序化的子集 $(D,\leqslant_D)$，其中 $D\subset A$ 且 $\leqslant_D$ 是 D 的良序. 这些子集可以重叠. 如果它们的良序各行其是，我们对整个 A 的良序化就作不出什么事情. 需要把各个良序 $\leqslant_D$ 统一起来. 设 φ 是 A 的一个选择函数（第四章，§4）我们将利用 φ 来统一诸良序化子集的良序：规定，对于每个良序化的子集 $(D,\leqslant_D)$，

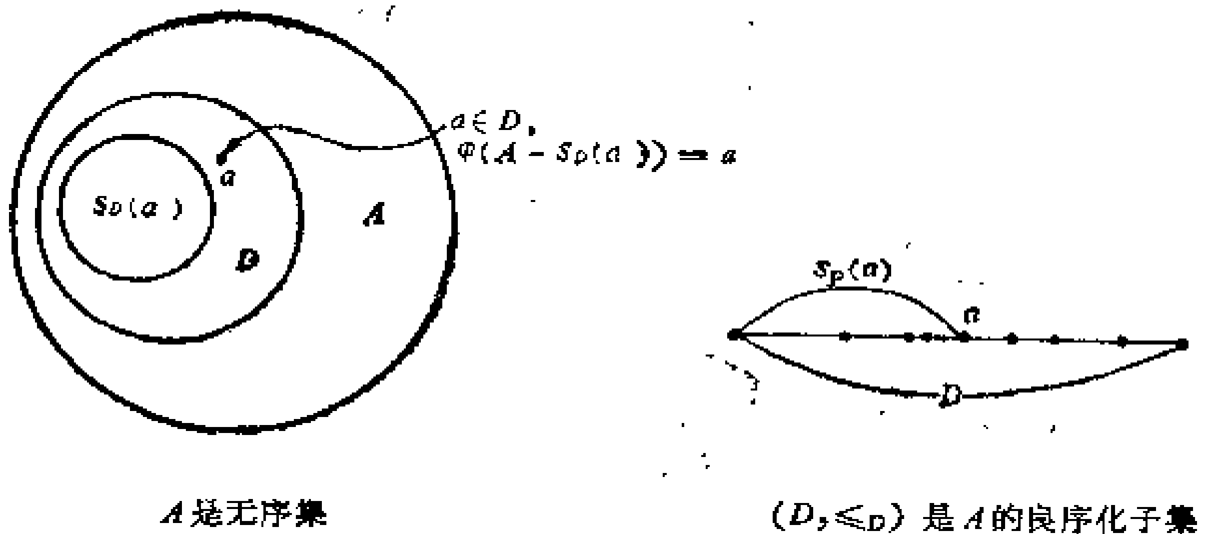
$$\forall a\in D(\varphi(A-s_D(a))=a) \qquad (*)$$

（参看图 31）. 例如，设 $a_0=\varphi(A)$，$a_1=\varphi(A-\{a_0\})$，$a_2=\varphi(A-\{a_0,a_1\})$. 那么，$(\{a_0\},=)$ 就是开头一个良序化子集. 如良序化子集 $(\{a_0,a_1\},\leqslant_1)$ 符合规定 $(*)$，则 a_0 必是最小元①，即 $a_0<_1a_1$. 如良序化子集 $(\{a_0,a_1,a_2\},\leqslant_2)$ 符合规定 $(*)$，则必有 $a_0<_2a_1<_2a_2$②. 观察按照规定 $(*)$

① 如 a_1 是最小元，则 $s_1(a_1)=\varnothing$，从而 $a_1=\varphi(A-s_1(a_1))=\varphi(A)=a_0$，但 $a_1\neq a_0$.

② 同①中理由，a_0 必是最小元. 又，a_1 必为次元，否则 $s_2(a_2)=\{a_0\}$，从而 $a_2=\varphi(A-s_2(a_2))=\varphi(A-\{a_0\})=a_1$，但 $a_2\neq a_1$.

得到的这前三个良序化子集，可以看出，它们在共同部分确实保持统一的良序．不但如此，它们的每一个总是包容其前面的各子集．把这情况设想到一般，可以期望，求一切符合规定（*）的子集（带着统一的良序）的并集，就会得到良序化了的 A．这就是以下定理证明的粗略轮廓．



A 是无序集　　　　$(D,\leqslant_D)$ 是 A 的良序化子集

图 31

【定理 7】（良序化原理）每个集合可以良序化．这就是说，对于任何的集合 A，存在它的一个偏序 $\leqslant$，使 $(A,\leqslant)$ 成为良序集．

证　可设 $A\neq\varnothing$．按照选择公理，设 φ 是 A 的一个选择函数．当且仅当 $D\subset A$ 满足条件：

i) 存在 D 的偏序 $\leqslant_D$，使 $(D,\leqslant_D)$ 是良序集，

ii) 对于任何的 $a\in D$，$\varphi(A-s_D(a))=a$，

称良序集 $(D,\leqslant_D)$ 是一个 Γ-集，并用 Γ 记这样一切 $D\subset A$ 的全体．

我们暂时引入 Γ-集这个名称只是为了证明中叙述的方便，没有什么特别意义．以下分几步对定理进行证明．

1) 对于同一集合 $D\subset A$，如有两个良序 $\leqslant_D$，$\leqslant'_D$ 使 $(D,\leqslant_D)$，$(D,\leqslant'_D)$ 都是 Γ-集，则 $\leqslant_D$ 与 $\leqslant'_D$ 相同.

只要证明对于每个 $a\in D$，按两种良序的前段 $s_D(a)$ 与 $s'_D(a)$ 相同就可以了．我们应用超限归纳原理：设对于一切 $x<_D a$，$s_D(x)=s'_D(x)$，求证 $s_D(a)=s'_D(a)$.

在以上的归纳假设下，先证集合 $s_D(a)$ 在良序集 $(D,\leqslant')$ 中仍然是个截段．事实上，设 $x\in s_D(a)$（即 $x<_D a$）且 $y<'_D x$．按归纳假设，$y<_D x$，从而 $y<_D a$，即 $y\in s_D(a)$．可见 $s_D(a)$ 是 $(D,\leqslant')$ 中的截段，且因 $a\notin s_D(a)$，故 $s_D(a)$ 是真截段．设它是 a' 的前段：

$$s_D(a)=s'_D(a').$$

按 Γ-集的定义的条件 ii)，

$$a=\varphi(A-s_D(a))=\varphi(A-s'_D(a'))=a'.$$

故 $s_D(a)=s'_D(a)$．于是归纳地得到，对于每个 $a\in D$，

$$s_D(a)=s'_D(a).$$

2) 如 $(D,\leqslant_D)$ 与 $(E,\leqslant_E)$ 都是 Γ-集，则 D 是 $(E,\leqslant_E)$ 的截段或 E 是 $(D,\leqslant_D)$ 的截段，且二者在共同部分顺序保持一致.

由于尚未证明两个良序在 D，E 的共同部分的一致性，直接证明上述断言是困难的．以下运用一个手法．设 Σ 是满足以下条件的 F 的全体：

a) $F\subset D\cap E$，

b) F 同时是 $(D,\leqslant_D)$ 与 $(E,\leqslant_E)$ 的截段.①

① 这是说，F 不但处于 D，E 的共同部分中，而且同时是二者的截段．目前应该认为，作为 D 的截段，F 是按 $\leqslant_D$ 的顺序的；作为 E 的截段，F 是按 $\leqslant_E$ 的顺序的.

设 $G=\bigcup(\Sigma)$. 不难验证 G 仍满足条件 a), b)(以 G 代 F), 就是说 G 是最大的 F. 以下证明 G 不能同时是 $(D,\leqslant_D)$ 与 $(E,\leqslant_E)$ 的真截段. 事实上,如 G 同时是二者的真截段,则存在 $d\in D$ 及 $e\in E$, 使 $G=s_D(d)=s_E(e)$. 因 $(D,\leqslant_D)$ 与 $(E,\leqslant_E)$ 是 Γ-集,故 $\varphi(A-G)=d=e$. 可见 $d=e\in D\cap E$. 设 $G'=G\cup\{d\}$. 不难验证 $G'=\bar{s}_D(d)=\bar{s}_E(e)$ 仍满足条件 a), b), 这就同 G 是最大的 F 矛盾. 现在, G 既同时是 $(D,\leqslant_D)$ 与 $(E,\leqslant_E)$ 的截段,又不同时是二者的真截段,它只好与 D, E 之一重合. 不妨设 $G=E$. 于是 E 是 $(D,\leqslant_D)$ 的截段. 现在, $(E,\leqslant_E)$ 是 Γ-集,另一方面,作为 Γ-集 $(D,\leqslant_D)$ 的截段, $(E,\leqslant_D)$ 也是 Γ-集. 所以,按 1) 中已证的结果,在 E 中 $\leqslant_D$ 与 $\leqslant_E$ 相同.

3) 设 $U=\bigcup(\Gamma)$, 并如下定义整个 U 的偏序: 由 2), 任何两个 $x,y\in U$ 必同属于某个 $D\in\Gamma$, 我们就用这个 D 的偏序 $\leqslant_D$ 来确定 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$. 这不依赖 D 的选取. 事实上, 设 x,y 同属于 $D\in\Gamma$ 且同属于 $E\in\Gamma$, 则按 2) 中已证,或者 E 是 $(D,\leqslant_D)$ 的截段,或者 D 是 $(E,\leqslant_E)$ 的截段, 并且在 x,y 所属的共同部分保持顺序一致,即

$$x\leqslant_D y\Longleftrightarrow x\leqslant_E y.$$

在赋予 U 以偏序的基础上,我们证明,每个 $D\in\Gamma$ 是 $(U,\leqslant)$ 的一个截段. 事实上,设 $a\in D$ 且 $x<a$. 设 $x\in$ 某个 $E\in\Gamma$. 那么,或者 E 是 $(D,\leqslant_D)$ 的截段,这时当然 $x\in D$; 或者 D 是 $(E,\leqslant_E)$ 的截段, 这时由 $a\in D$ 及 $(x<a\Longleftrightarrow x<_E a)$ 推出 $x\in D$.

4) $(U,\leqslant)$ 是 Γ-集.

事实上, i) 设 $B\subset U$ 且 $B\neq\varnothing$. 任取 $b\in B$, 并看非

空集合 $C=\{x\in B\mid x\leqslant b\}$. 因$U$是一切$D\in\Gamma$的并集，故$b$属于某个$D\in\Gamma$. 由3)，$D$是$U$的一个截段，所以任何$x\leqslant b$都属于$D$，可见$C\subset D$. 既然$C$是良序集$D$的非空子集，故$C$有最小元，它也是$B$的最小元. 这就证实了$U$的良序性.

ii) 设$a\in U$，则a属于某于$D\in\Gamma$. 因D是U的截段，故

$$s(a)=s_D(a).$$

但D满足Γ集的条件 ii)，故

$$\varphi(A-s(a))=\varphi(A-s_D(a))=a.$$

5) $U=A$.

事实上，如$U\neq A$，则$A-U\neq\varnothing$. 设

$$U'=U\cup\{\varphi(A-U)\},$$

并如下规定U'的偏序：a) 在$U\subset U'$中，保持U的原来顺序，b) 取$\varphi(A-U)$为U'的最大元. 不难验证带有这样偏序的U'仍是Γ-集. 这就同U是最大的Γ-集矛盾.

总结以上，$(A,\leqslant)=(U,\leqslant)$是良序集. 定理全部得证. ∎

良序化原理最早是由集合论的创始人 G. Cantor 提出来的，他称之为一个"极为重要的逻辑律". 同时，他又企图证明这一原理，但在他有生之年没有达到目的. 在 1904 年，集合论公理的带头人 E. Zermelo 第一次利用选择公理证明了良序化原理. 我们采用的证法就是遵循 Zermelo 在 1904 给出的证明. 选择公理在这证明中起着最关键的作用. 正是由于承认了A的选择函数φ的存在，我们才能利用它在Γ-集的定义 ii) 中使一切Γ-集的良序统一起来，直至最后确定了$U=A$的良序.

如果我们承认选择公理，那么根据它而证明了的良序化

原理也就被我们接受下来. 不过，应该看到问题的复杂性. 仅看实数集 $\boldsymbol{R}$ 就可以了.（更不必说比它"大"得多的集合如 $\mathscr{P}(\boldsymbol{R})$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\boldsymbol{R}))$ 等等.）按其本来的顺序，$\boldsymbol{R}$ 是全序集而非良序集. 良序化原理肯定 $\boldsymbol{R}$ 可以良序化，但至今没有任何人能够给出 $\boldsymbol{R}$ 的一个具体良序的明显定义！

尽管良序化原理是这样的不易想像，但它同选择公理一样，却是当代不少数学分支中一些重要内容的理论根据. 单就集合论而言，下面就是良序化原理的一个极其重要的应用. 在第四章，§3 的末尾，我们曾提出问题：任二集合是否必定可较？这个问题现在可以解决了.

【定理 8】（无序集的可较原理）对于任何两个集合 A, B，以下三种情形恰好有一成立：

1) $A \approx B$,　　2) $A \prec B$,　　3) $B \prec A$.

证　1) 同 2), 3) 分别不相容是明显的. 2) 同 3) 也不相容，因为

$$A \prec B \wedge B \prec A \Rightarrow A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A \wedge \urcorner(A \approx B).$$

$$\Rightarrow A \approx B \wedge \urcorner(A \approx B)$$

(Schröder-Bernstein 定理).

以下证明 1), 2), 3) 中至少有一成立. 按良序化原理，可以分别赋予 A, B 以良序. 再按良序集的可较原理(§4, 定理 6)，以下情形至少有一成立：

i) 良序集 A 与良序集 B 相似，此时 $A \approx B$;

ii) 良序集 A 与良序集 B 的某一真截段相似，此时 $A \preccurlyeq B$;

iii) 良序集 B 与良序集 A 的某一真截段相似，此时 $B \preccurlyeq A$.

略去重复部分，可知定理中的1)，2)，3)至少有一成立. ∎

§6 Zorn 引理

在§1，我们考虑的是一般的序集. 从§2开始，我们就把主要注意力集中在良序集上面，并导出一些重要的结果.现在仍回到一般的序集. 在§2,我们已经定义了序集的最大元概念，现在把这概念进行推广. 设A是一个序集且$a\in A$. 我们说a是A的一个极大元，指的是在A中不存在大于a的元素，即

$$\forall x\in A(x\not> a). \tag{1}$$

例如(参看图25)，包容序集$\mathscr{P}(3)-\{\{0,1,2\}\}$没有最大元，但$\{0,1\}$，$\{0,2\}$，$\{1,2\}$都是它的极大元.

现在看最大元和极大元两个概念的区别和联系. 首先，我们知道，如果序集有最大元，它必是唯一的(§2，注1). 但是，由上例可以看出，一个序集可以有多个极大元. 其次，从偏序的半三歧性(§1，注1)可以看出，一个序集的最大元必同时是极大元. 对于全序集来说，倒过来也对. 这是因为，按全序的完全三歧性，对于全序集，(1)同$\forall x\in A(x\leqslant a)$等价.可见全序集的极大元同时是唯一的最大元. 但是，对于一般序集来说，$x\not> a$包括$x\leqslant a$和x，a不可较两种可能，可见极大元不一定是最大元，上面的例子说明这一点.

以下分析一下极大元的定义(1). 设a满足条件(1). 如再设$x\geqslant a$，则必有$x=a$. 另一方面，设a满足条件

$$\forall x\in A(x\geqslant a\Rightarrow x=a), \tag{2}$$

我们证明(1)成立. 事实上,如(1)不成立,即 $\exists x \in A(x > a)$. 但

$$x > a \Rightarrow x \geq a$$
$$\Rightarrow x = a. \qquad (2)$$

这就与偏序的半三歧性矛盾. 这样,我们可用与条件(1)等价的条件(2)作为极大元的定义:

【定义】 设给定序集 A. 当且仅当存在 $a \in A$, 使得对于任何的 $x \in A$,

$$x \geq a \Rightarrow x = a,$$

说 a 是 A 的一个极大元.

定义的这种形式往往在推理中使用方便.

一个序集 A 的极小元 $a \in A$ 指的是,在 A 中不存在小于 a 的元素. 这定义可写成如下形式:

【定义】 设给定序集 A. 当且仅当存在 $a \in A$, 使得对于任何的 $x \in A$,

$$x \leq a \Rightarrow x = a,$$

说 a 是 A 的一个极小元.

下面介绍链的概念. 我们知道,一个序集不一定是全序的. 不过,任何序集总有全序子集. 例如,作为任一序集的子集,空集是全序(而且是良序)的;任何非空序集 A 的单元素子集都是 A 的全序(而且是良序)子集.

【定义】 一个序集 A 的全序子集 B (即 B 是 A 的子集且 A 的偏序在 B 中为全序) 叫 A 的一个链.

例如,对于带有包容序的 $\mathscr{P}(3)-\{\{0,1,2\}\}$ (参看图25), 子集 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing,\{0\}\}$, $\{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}\}$, $\{\{0\},$

$\{0, 2\}\}, \{\varnothing, \{0, 2\}\}$ 等等都是链.

下面，我们把注意力集中在包容序$\subset$上面. 我们知道，如 M 是一个集组，则 $(M, \subset)$ 是一个序集，但不一定是全序集. 设 C 是 M 的一个链，那么对于 C 中任意两个集合 A, B，若非 $A\subset B$，就是 $B\subset A$. 现在，对链 C 求并，就是说，把 C 的一切成员并起来. 这时，可能并集 $\bigcup(C)$ 仍是 M 的成员，也可能不是. 例如，对于 $\mathscr{P}(3)-\{\{0, 1, 2\}\}$（参看图 25）来说，对它的每个链求并，并集都不会超出它. 又如，看自然数集 ω. 我们知道，每个自然数 n 都是由小于它的自然数组成的集合：$n=\{i\in\omega|i<n\}$（第三章，§4，注）. 这样，可把 ω 看成一个集组. ω 本来的良序 $\leqslant$ 是同包容序$\subset$一致的（第三章，§4，定义）. 作为包容序集，ω 是它自己的一个链. 但 $\bigcup(\omega)=\omega\notin\omega$. 又如，在良序集 $\omega^+=\omega\cup\{\omega\}$ 中，对任何链求并，并集总是 ω^+ 的成员（注意：$\bigcup(\omega^+)=\omega$）.

【定义】 设给定包容序集 $(M, \subset)$①. 当且仅当对于 M 中的一切链 C，并集 $\bigcup(C)$ 总是 M 的成员，说 M 关于链的并封闭.

例如，上面举出的 $\mathscr{P}(3)-\{\{0, 1, 2\}\}$ 和 ω^+ 就是关于链的并封闭的，而 ω 就不关于链的并封闭.

利用以上定义中的术语，我们叙述以下有广泛应用的定理：

【定理 9】 （Zorn 引理） 设给定包容序集 $(M, \subset)$，其中 M 是非空集组. 如 M 关于链的并封闭，则 M 有极大元.

【分析】 先看一个简单例子： 带有包容序的集组 $M\doteq$

① M 看成集组，它的成员是集合.

$\mathscr{P}(3)-\{\{0, 1, 2\}\}$(图 32). 它有三个极大元 e, f, g. 我们寻求一个带有一般意义的途径，把其中之一"找"出来. 为了"顺籐摸瓜",先赋予 M 一个良序,如图所示: $a<c<d<f<g<b<e$.

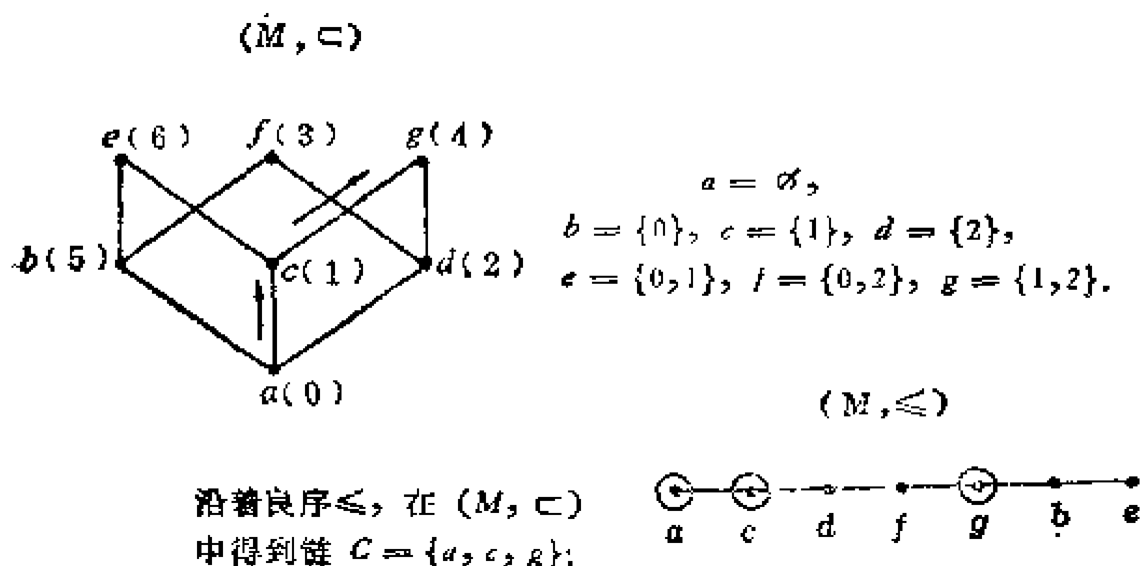


图 32

这良序同原来的包容序互不相干，但可用以下办法把二者统一起来. 从按良序 $\leqslant$ 的最小元 a 开始，顺次按这良序往后看: (1) c 包容 a，把它留下; (2) d 虽然包容 a，但不包容已留下的 c，把它弃去; (3) f 也不包容已留下的 c，把它也弃去; (4) g 包容所有已留下的 a 和 c，把它留下; (5) b 不包容已留下的 c 和 g，把它弃去; (6) e 不包容已留下的 g，把它也弃去. 这样，就沿着所给的良序 $\leqslant$，得到集组 M 的一个链 $C=\{a, c, g\}$，其中 $a\subset c\subset g$，并且不再有包容 g 的其他成员. 可见 g 是集组 M 的一个按包容序 $\subset$ 的极大元. 注意，$g=\bigcup(C)$. 以上是有限集的情形. 如 M 是一般的集组,我们就不一定能通过有限步骤得极大元. 但是,如果赋予

M 一个良序 $\leqslant$，我们仍可按上面把 M 的成员留下或弃去的原则，得到 M 的一个链 C. 设 $U=\bigcup(C)$. 由于 M 关于链的并封闭，故 $U\in M$. 可以期望，在 M 中不再有包容 U 而不等于 U 的成员，即 U 是 $(M,\subset)$ 的一个极大元. 这就是下面证明的轮廓.

这里，尚需明确表示构成所需的链 C 的"原则". 对于 $A\in M$，不妨用 $u(A)=1$ 表示把 A 留在 C 里，用 $u(A)=0$ 表示把 A 弃去. 这样，u 就是从 M 到 $\{0,1\}$ 内的一个函数. 对照上例，我们的原则应该是：

当 A 包容一切使 $B<A$ 且 $u(B)=1$ 的 B 时，规定

$$u(A)=1;$$ ①

当 A 不符合上述条件时，规定 $u(A)=0$.

以下是定理的正式证明：

证 1) 根据良序化原理，设 $\leqslant$ 是集组 M 的一个良序. 设函数 $u:M\to\{0,1\}$ 如下定义：

$$u(A)=\begin{cases}1, & \text{当 } \forall B<A(u(B)=1\Rightarrow B\subset A), \quad (1)\\ 0, & \text{当 } A \text{ 不符合条件 (1)}.\end{cases}$$

函数 u 的存在性需要用超限递推原理（§3，定理 3）来保证. 可取良序集 M 作为定理 3 中的 W，取 $\{0,1\}$ 作为定理 3 中的取值集 X，并如下定义定理 3 中的递推函数 f：对于任何的 $A\in M$ 及任何的 $t:s(A)\to\{0,1\}$，令

$$f(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } \forall B\in s(A)(t(B)=1\Rightarrow B\subset A),\\ 0, & \text{当 } t \text{ 不符合上述条件}.\end{cases}$$

---

① 例如，不难看出，如 A_0 是 $(M,\leqslant)$ 的最小元，则 $u(A_0)=1$. 就是说，最小元 A_0 留在链里.

2) 设 $C=\{A\in M\mid u(A)=1\}$. 以下证明C中的包容序$\subset$与M中的良序$\leqslant$一致. 事实上,设 $A, B\in C$ 且 $B\leqslant A$. 此时 $u(A)=u(B)=1$. 因 $u(A)=1$, 故A符合条件(1). 于是由$B\leqslant A$及 $u(B)=1$ 推出 $B\subset A$. 另一方面,设 $A, B\in C$ 且 $B\subset A$, 我们证明 $B\leqslant A$. 事实上,设 $B>A$. 因 $u(B)=1$, 故B符合条件(1)(A, B互换). 于是由$A<B$及 $u(A)=1$ 推出 $A\subset B$. 连同假设 $B\subset A$, 得到 $A=B$, 这就与假设$B>A$矛盾. 可见在C中, 关系$\subset$与$\leqslant$一致. 这样,序集 $(C,\subset)$ 与良序集 $(M,\leqslant)$ 的子集 $(C,\leqslant)$ 相似, 所以也是一个良序集. 于是 $(C,\subset)$ 是 $(M,\subset)$ 的一个链.

3) 设 $U=\bigcup(C)$. 按题设, $U\in M$. 以下证明U是$(M,\subset)$的一个极大元. 事实上,设$U\subset D$, 则D包容一切使 $u(A)=1$ 的 $A\in M$, 故D符合条件(1)(以D代A, 以A代B), 于是 $u(D)=1$. 可见 $D\in C$, 从而 $D\subset U$. 这就得到 $D=U$. 按定义,U是M的一个极大元. ∎

在以上证明中, 良序化原理起着关键的作用. 正是由于向集组M引入了良序$\leqslant$,才使我们能利用超限递推原理定义证明中的函数 $u: M\to\{0, 1\}$, 通过这个函数u使我们得到包容序$\subset$与良序$\leqslant$一致的链C, 从而得到极大元 $U=\bigcup(C)$.

作为本节的结尾,我们附带引入序集的上, 下界和上,下确界的概念. 以前引入的最大元, 最小元和极大元,极小元,都是在给定序集内部考虑的, 它们都是给定集合的元素. 将要引入的上,下界和上,下确界则可能不是给定集合的元素.

【定义】 设A是序集X的子集. 当且仅当存在 $b\in X$,使

对于任何的 $x\in A$，都有 $x\leqslant b(b\leqslant x)$，说 b 是 A 在 X 中的一个上界(下界).

同最大(小)元一样，一个集合的上(下)界起码要同这集合的一切元素可较.同最大(小)元不一样,一个集合的上(下)界,如果存在,不一定是唯一的. 此外，$A\subset X$ 的上(下)界 b 如果属于 A，b 就同时是 A 的最大(小)元.

例如,在任何非空序集 X 中,空集 $\varnothing$ 以 X 的任何元素为上界及下界. 又如，在序集 $(\mathscr{P}(3),\subset)$ (参看图 24)中，任何子集都以 $\{0,1,2\}$ 为上界，以 $\varnothing$ 为下界. 在包容序集 $\mathscr{P}(3)-\{\{0,1,2\}\}$ 中,集合 $\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\}\}$ 有下界 $\varnothing$，但没有上界. 在自然数集 ω 中,偶数集和奇数集都没有上界.

上面已经说过,一个序集如果有上(下)界,这上(下)界不见得是唯一的. 设 X 是一序集. 当且仅当 $A\subset X$ 的一切上界(下界)的集合有最小元(最大元) β，说 β 是 A 的上确界(下确界)或最小上界(最大下界)，记为

$$\beta=\sup(A)\qquad(\beta=\inf(A)),$$

或记为

$$\beta=\operatorname{lub}(A)\qquad(\beta=\operatorname{glb}(A)).$$

学过微积分的读者对于上,下确界是不生疏的. 例如,在有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 中,有上(下)界的子集不一定有上(下)确界，而在实数集 $\boldsymbol{R}$ 中,有上(下)界的非空子集必有上(下)确界. 以下再举两个例子.

【例 1】 设 M 是一集合，并考虑它的一切子集组成的包容序集 $(\mathscr{P}(M),\subset)$. 设 $A,B\in\mathscr{P}(M)$，看集合 $\{A,B\}$. 对于任何 $C,D\in\mathscr{P}(M)$ 且 $A\subset C$，$B\subset D$，集合 $C\cup D$ 是 $\{A,B\}$ 的上界，而集合 $A\cup B$ 则是 $\{A,B\}$ 的上确界. 对

于任何 $C, D \in \mathscr{P}(M)$ 且 $C \subset A$, $D \subset B$, 集合 $C \cap D$ 是 $\{A, B\}$ 的下界,而集合 $A \cap B$ 则是 $\{A, B\}$ 的下确界.

【例 2】 在正整数集 Z^+ 中,规定当且仅当 m 能整除 n 时,说 mRn. 不难验证 (Z^+, R) 是一个序集. 在此序集中,任何有限非空子集的元素的最小公倍数是这子集的上确界,而无穷子集就没有上界. 任何非空子集以其元素的最大公约数为下确界.

§7* Zorn 引理的另一形式

定理 9 给出了 Zorn 引理的常用形式,它是针对包容序而言的. 以下给出 Zorn 引理的另一形式,它是针对一般的偏序而言的.

【定理 10】 Zorn 引理与以下命题等价:

设给定非空序集 X. 如 X 的每个链在 X 中有上界,则 X 有极大元.

证 用 $[Z]$ 记定理 9, 用 $[Z_1]$ 记定理 10 中所述命题.

1) 由于在包容序集 $(M, \subset)$ 中,对于每个链 C, 并集 $\bigcup(C)$ 是它的一个上界,所以 $[Z]$ 是 $[Z_1]$ 的特殊情形.

2) 设 $[Z]$ 成立,我们用它来证明 $[Z_1]$. 设 $(X, \leqslant)$ 是非空序集,并设 $(X, \leqslant)$ 的每个链在 X 中有上界. 用 M 记 X 中一切链组成的集合. 因 $\varnothing \in M$, 故 $(M, \subset)$ 是非空包容序集. 设 C 是 $(M, \subset)$ 的一个链,则 $\bigcup(C) \subset X$. 以下证明 $\bigcup(C)$ 是 $(X, \leqslant)$ 的一个链. 事实上,对于任何的 $x, y \in \bigcup(C)$, 因 C 是 $(M, \subset)$ 的链, x, y 必属于 M 中同一成员 T, 而后者是 $(X, \leqslant)$ 的链,可见 x, y 必关于 $\leqslant$ 可较. 这就证明

了 $\bigcup(C)$ 是 $(X,\leqslant)$ 的链，即 $\bigcup(C)\in M$，从而证明了包容序集 $(M,\subset)$ 关于链的并封闭．按 [Z]，存在 $(M,\subset)$ 的一个极大元 U．由于 U 是 $(X,\leqslant)$ 的链，故按题设，可设 b 是 U 在 $(X,\leqslant)$ 中的一个上界．这样，b 就是 $(X,\leqslant)$ 的一个极大元，这是因为，如 b 不是极大元，就存在 $c\in X$，使 $c>b$．看集合 $U\cup\{c\}$．它仍是 $(X,\leqslant)$ 的链，且是 $(M,\subset)$ 中比 U 大的成员，这就同 U 是 $(M,\subset)$ 中的极大元矛盾． ▋

§8* 选择公理的等价命题

在第四章，§4，我们设立了选择公理．在本章的 §5，我们用选择公理推出了良序化原理．在 §6，又用良序化原理推出了 Zorn 引理．在本节，我们假定选择公理(连同良序化原理)尚未被承认，在承认 Zorn 引理的基础上，用 Zorn 引理来推导选择公理．

先用 Zorn 引理证明以下引理：

【引理】① 设 R 是一个关系，则存在一个函数 $F\subset R$，使 $\mathrm{dom}(F)=\mathrm{dom}(R)$．

证 如 $R=\varnothing$，则可取 $F=\varnothing$．以下设 $R\neq\varnothing$．记 $M=\{f\subset R\mid f$ 是函数$\}$，则 $M\neq\varnothing$，因为，任取 $(x,y)\in R$，则 $\{(x,y)\}\subset R$ 是个函数．以下证明 M 关于链(按包容序)的并封闭．事实上，看 M 的任一个链 C，C 的成员都是 M 的元素，从而是 R 的子集，故 $\bigcup(C)\subset R$．以下证明关系 $\bigcup(C)$ 是函数．事实上，如 (x,y)，(x,z) 都属于 $\bigcup(C)$，由于 C

---

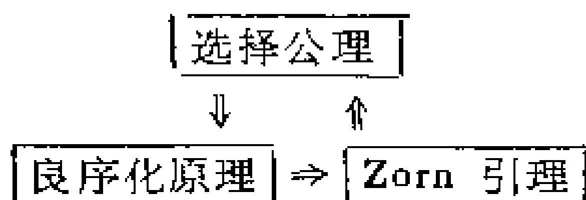
① 有些书把这引理也叫选择公理．看习题四，23．

是个链，可见 (x,y) 与 (x,z) 必属于同一个函数 $f\in C\subset M$，所以 $y=z$. 由 $\bigcup(C)$ 是函数且 $\bigcup(C)\subset R$ 推知 $\bigcup(C)\in M$，从而断定 M 关于链的并封闭. 按 Zorn 引理，M 有极大元 F，它是个函数. 以下证明 $\mathrm{dom}(F)=\mathrm{dom}(R)$. 事实上，如果不然，则可取 $x\in\mathrm{dom}(R)-\mathrm{dom}(F)$. 因 $x\in\mathrm{dom}(R)$，故存在 y，使 $(x,y)\in R$. 记 $F'=F\cup\{(x,y)\}$，则 $F'\in M$. 这就同 F 是 M 的极大元矛盾. ▮

以下用引理证明选择公理：

设给定集族 $(A_i)_{i\in I}$，其中标集 $I\neq\varnothing$，且每一项 $A_i\neq\varnothing$. 看关系 $R=\{(i,x)|i\in I\wedge x\in A_i\}$. 由引理，存在函数 $a\subset R$，使 $\mathrm{dom}(a)=\mathrm{dom}(R)=I$. 既然 $a\subset R$，故对每个 $i\in I$，$a(i)\in A_i$. 用族的记法，即存在族 $(a_i)_{i\in I}$，使每个 $a_i\in A_i$. ▮

把已证的结果连同以前证过的结果图解如下：



这样，在我们已经设立的，除选择公理以外的其他公理的基础上，选择公理，良序化原理和 Zorn 引理是三个两两等价的命题，随便把其中哪个命题当作公理放在我们的公理系统里，都能推出其他两个命题.

习 题 五

1. (§1，注1的逆) 设 $<$ 是集合 A 中的关系且具有以下性质：对于任何的 $x,y,z\in A$，

1) $x=y$, $x<y$, $y<x$ 互不相容;

2) $x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z$.

记 $(x<y \vee x=y)$ 为 $x \leqslant y$. 试证$\leqslant$符合 §1 的偏序定义.

2. 证明 §1,注 2.

3. 仿照图 24，画出以下序集 (X,R) 的图解:

1) $X=\{a,b,c,d,e\}$,

$R=\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,e),(c,e),(d,e)\} \cup I_X$.

(I_X 是 X 上的恒等函数)

2) $X=\{a,b,c,d,e,f,g\}$,

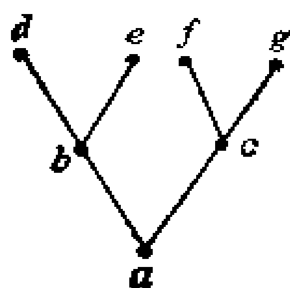
$R=\{(a,g),(b,g),(c,g),(g,e),(g,f),(a,e),$

$(a,f),(b,e),(b,f),(c,e),(c,f)\} \cup I_X$.

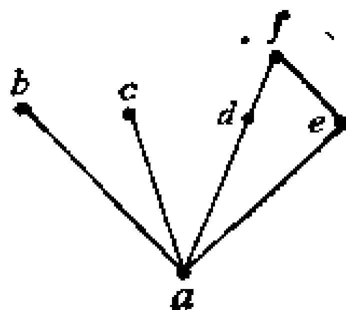
3) $X=\{a,b,c,d\}$, $R=\{(c,d)\} \cup I_X$.

4) $X=\mathscr{P}(\{a,b,c\})$, $R=\subset$.

4. 写出以下图解中的偏序:



(1)



(2)

图 33

5. 设 R 是集合 X 中的关系. 试证: 当且仅当 $R=I_X$ (X 上的恒等函数)时，R 同时是 X 中的等价关系和偏序.

6. 设 R 是集合 X 的偏序且 $A \subset X$. 证明，$R \cap (A \times A)$ 是 A 的偏序.

7. 证明，R 是 X 的偏序，当且仅当 R^{-1} 是 X 的偏序.

8. 设 R 是 X 中的自反且传递的关系(当然，R 不一定是 X 中的等

价关系或偏序). 试证:

1) 如 X 中的关系 S 定义为: 对任何 $x, y \in X$,

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R,$$

则 $S \subset R$ 是 X 中的等价关系.

2) 在商集 X/S 中定义关系 $\bar{R}$ 如下:

$$([x]_S, [y]_S) \in \bar{R} \Leftrightarrow (x, y) \in R,$$

则 $\bar{R}$ 是 X/S 的偏序. (应先验证 $[x]_S \bar{R} [y]_S$ 不依赖于代表 $x, y \in X$ 的选取.)

9. 设 $(A, \leqslant_A)$, $(B, \leqslant_B)$ 是序集. 如下定义 $A \times B$ 中的关系 R: 对于任意的 $(a, b), (a', b') \in A \times B$,

$$(a, b) R (a', b') \Leftrightarrow a \leqslant_A a' \wedge b \leqslant_B b'.$$

试证 R 是 $A \times B$ 的一个偏序.

10. 设 $(A, \leqslant)$ 是一个序集. 用 X 记 A 的这样的子集, 其任何不同元素不可较(即对任何的 $x, x' \in X$, 如 $x \leqslant x'$, 则 $x = x'$). 用 C 记这样一切 X 组成的集合. 如下定义 C 中的关系 R: 对于任何的 $X, Y \in C$,

$$XRY \Leftrightarrow \forall x \in X \exists y \in Y (x \leqslant y).$$

试证 R 是 C 的一个偏序.

11. 在第 3 题与第 4 题中, 如给定的序集有最小元或最大元, 请指出; 如没有最小元或最大元, 也请指明.

12. 对全序集 A 及 $a \in A$, 验证前段 $s(a) = \{x \in A \mid x < a\}$ 和弱前段 $\bar{s}(a) = \{x \in A \mid x \leqslant a\}$ 都是 A 的截段.

13. 对全序集 A, 试证:

1) $\bigcup_{a \in A} \bar{s}(a) = A$. 2) 当 $A \neq \varnothing$, $\bigcap_{a \in A} s(a) = \varnothing$.

3) 当 $A \neq \varnothing$, 且当 A 有最小元 a_0 时, $\bigcap_{a \in A} \bar{s}(a) = \{a_0\}$; 当 A 没有最小元时, $\bigcap_{a \in A} \bar{s}(a) = \varnothing$.

14. 设 (X, R) 是序集且 $A\subset X$, $a\in A$. 试证 a 是 A 的最小元,当且仅当 $\operatorname{ran}(R\cap(\{a\}\times A)) = A$.

15. 设 X 是全序集且 A, B 是 X 的截段. 试证: A 是 B 的截段或 B 是 A 的截段.

16. 证明,如全序集 A 的一切可数子集是良序的, 则 A 是良序的. [提示: 如全序集 A 非良序,可设 B 是 A 的非空且无最小元的子集. 利用选择公理及关于 ω 的递推原理, 可以制造 B 的一个与 ω 等势且无最小元的子集.]

17. 设 W 是全序集且具有以下性质: 对于任何满足条件

$$\forall a\in W(s(a)\subset A \Longrightarrow a\in A) \qquad (*)$$

的 $A\subset W$, 都有 $A = W$, 试证 W 是良序集.

[提示: 设 $B\subset W$ 且 $B\neq\varnothing$. 看 B 的一切严格下界的集合:

$$A = \{t\in W \mid t< \text{一切 } x\in B\}.$$

显然 $A\cap B = \varnothing$. A 不能符合条件$(*)$, 否则 B 是空集. 于是存在 $a\in W$, 使 $s(a)\subset A$ 但 $a\notin A$. 证明 a 是 B 的最小元.]

18. 试给出从$(0,1)$到 $\boldsymbol{R}$ 上的一个相似映射.

19. 自然数集 ω 与有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 等势,但它们不能相似(按本来的顺序). 为什么?

20. 试对 §4 的引理 1, 2, 举出非良序的全序集的反例.

21. 举例说明整数集 $\boldsymbol{Z}$ (它不良序) 到自己上面的相似映射不唯一. 不过,试证明 f 是 $\boldsymbol{Z}$ 到自己上面的相似映射, 当且仅当 f 是位移, 即存在某个 $m_0\in\boldsymbol{Z}$,使 $f(m) = m + m_0$.

22. 证明由 $f(x) = ax + b$ $(a>0)$ 确定的 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 是相似映射. 举例说明 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 上的相似映射不一定是这样的类型.

23. 设序集 $(X,\leqslant_X)$ 与序集 $(Y,\leqslant_Y)$ 相似. 试证, 如 $(X,\leqslant_X)$ 全序,则 $(Y,\leqslant_Y)$ 全序;如 $(X,\leqslant_X)$ 良序,则 $(Y,\leqslant_Y)$ 良序.

24. 证明无穷的良序集必有相似于自然数集 ω 的子集. [提示: 不妨引用良序集的比较原理.]

25．对于集合 A 的全序 $\leqslant$，当且仅当 A 有限时，$(A,\leqslant)$ 与 $(A,\geqslant)$ 都是良序集．

26．设 $(A,\leqslant)$ 是良序集．设

$$\varphi=\{(B,b)\mid B\in\mathscr{P}(A)-\{\varnothing\} \text{ 且 } b \text{ 是 } B \text{ 的最小元}\}.$$

1）证明 φ 是集合且是函数．

2）利用 1），由良序化原理推出选择公理．

27．在第 3 题与第 4 题中，指出给定序集的极大元，极小元．

28．不利用或利用 Zorn 引理，证明每一非空有限序集必有极大元．

29．设 $a\neq b$．写出偶集 $\{a,b\}$ 的一切可能的偏序．用 Q 记这一切偏序的集合．指出包容序集 $(Q,\subset)$ 的极大．

30．设给定集合 X，并设 Q 是 X 的一切可能的偏序的集合．对于包容序集 $(Q,\subset)$，试证，T 是 Q 的极大，当且仅当 T 是 X 的全序．

［提示：关于必要性，设 T 是 Q 的一个极大，并设 T 不是 X 的全序，即存在 $a,b\in X$，使 $(a,b)\notin T$ 且 $(b,a)\notin T$．设

$$T_1=\{(x,y)\in X\times X\mid (x,a)\in T\wedge(b,y)\in T\},$$

则 $(a,b)\in T_1$，可见 T_1 不是 T 的子集．严格延拓 T：设 $\bar{T}=T\cup T_1$．可以验证 $\bar{T}$ 是 X 的一个偏序，这就同 T 是 Q 的极大矛盾．］

31．设给定集合 X，并设 Q 是 X 的一切可能的偏序的集合．试证：如 C 是包容序集 $(Q,\subset)$ 的一个链，则 $\bigcup(C)$ 仍是 X 的偏序．

32．试证：如 R 是集合 X 的一个偏序，则存在 X 的一个全序 $\bar{R}$，使 $R\subset\bar{R}$．

［提示：设 $M=\{S\mid S \text{ 是 } X \text{ 的偏序且 } R\subset S\}$．对于 M，引用第 31 题，Zorn 引理和第 30 题．］

33．如 E 是域 K 上的向量空间，则 E 必有基底①．

34．设 R 是有单位元的环，则 R 的每个真理想 $(\neq R)$ 必包容于 R

① 参看一般的“线性代数”读本．

的一个极大(按包容序)真理想①。

35. 试证每个全序集 $(X, \leqslant)$ 有一个良序子集 $(A, \leqslant)$，使对于每个 $x \in X$，存在 $a \in A$，使 $x \leqslant a$。

[提示：设 W 是 X 的一切良序子集的集合，$W \neq \varnothing$。如下赋予 W 偏序 R：当且仅当 $Y \in W$ 是 $Z \in W$ 的截段时，说 YRZ。设 C 是 (W, R) 的一个链，证明 $\bigcup(C)$ 是 X 的良序子集，即 $\bigcup(C) \in W$。按 Zorn 引理，(W, R) 有极大元 A。证明 A 就是所需要的良序子集。]

36. 在图 33,1) 中，记 $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$，$A = \{b, d, e\}$，$B = \{b, e\}$，$C = \{b, d, e, f\}$。分别指出(如果存在) A, B, C 在序集 X 中的上界，下界，最小上界，最大下界。

---

① 参看一般的"抽象代数"读本。

第六章 序数与基数

§1 引 言

从自然数说起。在人们的生活中，自然数起着两个方面的作用。一个方面的作用是判断事物的多少。例如，已知教室有 60 个座位，将有 48 个学生听课。我们判断座位数比学生数多，于是认为这教室可以容纳这些学生听课。另一方面的作用是给一些事物编排序号。例如，可把讲台算作第 0 号，把座位由左往右，并由前往后地标上第 1 号，第 2 号，……，第 60 号。同时，可把教师算作第 0 号，把 48 个学生按照个子高矮编成第 1 号，第 2 号，……，第 48 号。那么，上课铃一响，大家就可以毫无争论地对号入座，进行课堂活动。

按照我们的理论，一个自然数 n 指的是最小归纳集 ω 的一个元素(第三章，§ 2，定义)。n 本身是个集合，其元素仍是自然数(第三章，§ 2，注 2)。下面，在我们的理论指导下，重新考察上述自然数的两方面作用：

1) 对于任给的有限集 A，存在唯一的自然数 n，使得 $A \approx n$(第四章，§ 2，定义及定理 2)。这时记 $n = N(A)$，并称之为 A 的元素个数。如果两个有限集 A，B 有相同的元素个数：$N(A) = N(B)$，我们就认为它们的元素一样多；如果 $N(A) < N(B)$，我们就认为 A 的元素比 B 的元素少，或 B 的元素比 A 的元素多。这就是说，自然数被当成判断有限集元

素多少的标准。

2）设（A，$\leqslant_A$）是有限良序集，并设它与小于 n 的一切自然数组成的良序集（n，$\leqslant_\omega$）相似。那么，相似对应 $a:n\to A$ 就是唯一的（第五章，§4，定理5）。这就得到有限序列 $(a_i)_{i\in n}$，用习惯的记法，就是（a_0，a_1，$\cdots$，a_{n-1}）。在这有限序列中，我们说 a_0 是 A 的第0元素，a_1 是 A 的第1元素，$\cdots\cdots$，a_{n-1} 是 A 的第 $n-1$ 元素。这里，自然数 n 的诸元素起到了把有限良序集的元素编排序号的作用。

自然数在以上两方面所起的作用，其对象只限于有限集，对于无穷集，自然数就无能为力了。我们知道，一个无穷集不与任何自然数等势，因此自然数就不能判断无穷集元素的多少。同时，两序集相似首先要等势，因此任何自然数 n 的元素也不能给一个无穷良序集的元素编号。在本章，我们将把自然数的概念推广，使推广了的概念对无穷集也能起到上述方面1）的作用，或使推广了的概念对无穷的良序集① 也能起到方面2）的作用。在方面1）的推广就是后面引入的基数概念，在方面2）的推广就是后面引入的序数概念。从表面上看，基数概念似乎比较简单，但是，直接定义基数反而困难，而序数概念却可以简单地被定义（看下节）。因此，在本章我们先定义序数，然后利用序数定义基数。

§2　序　　数

先看两个具体例子：按有理数集 Q 的本来顺序，序集

① 对于无穷序集，我们只考虑良序的。

$$A = \left\{1 - \frac{1}{n+1} \middle| n \in \omega\right\},\ B = A \cup \{1\}$$

(看 p.142,图 26)都是无穷的良序集,它们的元素不能用任何自然数的元素编完。不难看出,$A \simeq \omega$。不妨用 ω 的元素(一切自然数)给 A 的元素编号:第 0 项为 0,第 1 项为 $\frac{1}{2}$,第 2 项为 $\frac{1}{3}$,……。同样,$B \simeq \omega^+$。不妨用 ω^+ 的元素给 B 的元素编号:第 0 项为 0,第 1 项为 $\frac{1}{2}$,第 2 项为 $\frac{1}{3}$,……,第 ω 项为 1。这样,不妨把良序集 ω 和 ω^+ 看成"大于"一切自然数的"数"。与 ω 或 ω^+ 相似的良序集可分别看成是与 ω 或 ω^+ 是同一"类型"的。这样,同自然数可以作为判断有限良序集的"类型"的标准一样,ω 与 ω^+ 这两个"数"不妨作为另外两种非有限的良序集的"类型"的标准。我们的任务就是定义整个一类这样的"标准"。

更确切地说,我们的任务是定义一类良序集(把它们叫做序数),符合以下要求:

1) 作为自然数的推广,这一类应包含每个自然数。

2) 作为所有的良序集的"类型"的标准,对于任给的良序集,在这一类中应恰好有一个良序集(序数)与之相似。

要求 1) 是容易满足的。只要把一切自然数的某一共同性质拿来作定义就可以了。困难在于要求 2)。我们以下采用的定义是由 von Neumann 给出的,这定义不但满足要求 1),而且在引入一个新的公理(§ 4)以后,还能满足要求 2)(§ 5,定理 10)。

【定义】 一个良序集 α 叫做一个序数,当且仅当 α 的每一元素 x 总是 x 在 α 中的前段,即

$$\forall x \in \alpha(s_\alpha(x) = x).$$

(参看图 34)。定义中的条件等于说

$$\forall x \in \alpha \forall \xi \in \alpha(\xi <_\alpha x \Longleftrightarrow \xi \in x).$$

所以，良序集 α 是一个序数，当且仅当 α 的每一元素 x 都是由 α 中小于 x 的一切元素组成的。



图 34

【例 1】 设 n 是一个自然数，则按本来的顺序，n 是有限良序集。如 $x \in n$，那么 x 也是自然数(第三章，§2，注 2)，于是 x 是由小于它的一切自然数组成的集合(第三章，§4，注)：

$$x = \{i \in \omega \mid i < x\} = s_\omega(x) = s_n(x).$$

所以每个自然数 n 是序数。可见序数概念确是自然数概念的推广。

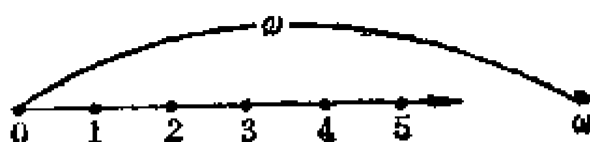
【例 2】 自然数集 ω，按其本来的顺序，是个序数。

这样，除有限的序数——自然数外，我们又有了无穷的序数。在我们这里，ω 是个数！

一个无穷的序数又叫做超限序数。以下是另一个超限序数的例子。

【例 3】 看 $\omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$。在 ω 中仍保持原来的顺序，并规定每个自然数小于 ω。带有这样顺序的 ω^+ 是一个序数(看图 35)。

【注 1】 不难验证，如 α 是序数，且按例 3 的规定(以 α



序数 $\omega^+=\omega\cup\{\omega\}$ 的示意图

图 35

代 ω) 确立 α^+ 中的顺序，则 α^+ 还是序数．例如，ω^{++}，ω^{+++}，$\cdots$，都是序数．

我们知道，任何自然数 n 的后继者 n^+ 还是自然数(第三章，§2，定理2)． 注1说明序数保留了自然数的这一性质．以下的定理1-3指明序数保留自然数的其他某些性质．

每个自然数 $n\neq 0$ (作为有限良序集)都以0为最小元．对于一般序数来说，也是这样：

【定理1】 对于任何序数 $\alpha\neq 0$，0是 α 的最小元．

证 按定义，α 是非空良序集．设 x_0 是 α 的最小元，则 $s_\alpha(x_0)=\varnothing=0$．再按定义，$x_0=s_\alpha(x_0)=0$． ∎

自然数的元素仍是自然数(第三章，§2，注2)．现在，同样有：

【定理2】 序数的元素仍是序数．

证 设 x 是序数 α 的元素，那么，1) $x=s_\alpha(x)$．作为良序集 α 的真截段，x 仍是良序集．2)对于任何的 $\xi\in x=s_\alpha(x)$，我们有 $\xi\in\alpha$．于是 $\xi=s_\alpha(\xi)=s_x(\xi)$．故按定义，$x$ 是序数． ∎

例如，序数 ω 的元素是自然数，它们是有限序数．序数 ω^+ 的元素是一切自然数和 ω．

两个等势的自然数必相等 (第四章，§2，引理2)．关于序数，有类似的性质：

【定理 3】 两个相似的序数必相等。

证　设 α, β 是相似的序数，并设 f 是从 α 到 β 上的相似映射。只要证明 f 是 α 上的恒等映射，即证明对于任何的 $x\in\alpha$，

$$f(x)=x\text{①} \tag{1}$$

就可以了。用超限归纳法。设对任何 $x\in\alpha$，x 前面的一切 ξ 都满足(1)：

$$\forall\xi\in s_\alpha(x)(f(\xi)=\xi), \tag{2}$$

求证对于这个 x，(1) 成立。事实上，i) 设 $y\in f(x)$。因 β 是序数且 $f(x)\in\beta$，故 $f(x)=s_\beta(f(x))$，从而 $y<_\beta f(x)$。因 f 是相似映射，故 $f^{-1}(y)<_\alpha x$。于是由(2)，$y=f(f^{-1}(y))=f^{-1}(y)<_\alpha x$，即 $y\in s_\alpha(x)=x$ (因 α 是序数)。ii) 设 $y\in x=s_\alpha(x)$，即设 $y<_\alpha x$。由 f 的相似性，得到 $f(y)<_\beta f(x)$。又由(2)，得到 $y=f(y)<_\beta f(x)$。可见 $y\in s_\beta(f(x))=f(x)$。这就由关于 x 的归纳假设(2)推出了 $f(x)=x$。但 $x\in\alpha$ 是任意的，故由超限归纳原理，对于任何的 $x\in\alpha$，(1) 成立。▮

【注 2】 如良序集 A 同序数 α 和 β 都相似，则 α 同 β 相似，由定理 3，$\alpha=\beta$。可见一个良序集至多能与一个序数相似。这就解决了本节开始对序数概念所提要求 2) 的唯一性部分。

§3　序数之间的顺序

序数是特殊种类的良序集。因此，要想考虑序数的比较，

① 注意，0 是每个序数的最小元，故 $f(0)=0$。可见等式 $f(x)=x$ 从开头就定了调子的。

还应回到一般良序集，看一下关于它们的比较我们已经有了什么结果. 第五章，§4，定理6叙述的良序集的可较原理指出，对于任意两个良序集 α, β，以下三种情形恰好有一成立:

i) α 相似于 β;

ii) α 相似于 β 的某一真截段;

iii) β 相似于 α 的某一真截段.

如果 α, β 是序数，那么，由上节的定理3，情形 i) 等价于

i)′ $\alpha=\beta$.

其次，按序数的定义，序数 β 的真截段 γ 必是 β 的元素: $\gamma\in\beta$. 按上节定理2，γ 仍是序数. 再按上节定理3，序数 $\alpha\simeq\gamma$ 与 $\alpha=\gamma$ 等价. 可见情形 ii) 等价于

ii)′ α 是 β 的真截段，即 $\alpha\in\beta$.

同理，对于序数 α, β 来说，情形 iii) 等价于

iii)′ β 是 α 的真截段，即 $\beta\in\alpha$.

以下看情形 ii)′ 和 iii)′ 的另外的等价形式. 设情形 ii)′ 成立. 此时显然 $\alpha\subsetneqq\beta$. 另一方面，设序数 $\alpha\subsetneqq\beta$. 此时情形 i)′, iii)′ 显然都不成立，故情形 ii)′ 成立. 可见对于序数 α, β 来说，情形 ii)′ 又等价于

ii)″ $\alpha\subsetneqq\beta$.

同理，情形 iii)′ 又等价于

iii)″ $\beta\subsetneqq\alpha$.

总结以上，我们得到:

【引理1】 对于任何两个序数 α, β，以下三种情形恰好有一种成立:

i) $\alpha=\beta$;

ii) $\alpha\in\beta$，即 α 是 β 的真截段，即 $\alpha\subsetneqq\beta$;

iii) $\beta\in\alpha$，即 β 是 α 的真截段，即 $\beta\subsetneqq\alpha$。

引理 1 指明了序数之间的 $\in$ 的三歧性。以下引理 2 讲的是 $\in$ 的传递性。

【引理 2】 每个序数是传递集(第三章，§2，定义)，即对于任何序数 α，

$$\forall y\forall x(y\in x\land x\in\alpha\Rightarrow y\in\alpha).$$

证 如 $x\in\alpha$，则 $x=s_\alpha(x)$。 如 $y\in x$，则 $y\in s_\alpha(x)\subset\alpha$，故 $y\in\alpha$。 ▮

现在定义序数之间的顺序：

【定义】 对于两个序数 α,β，当且仅当 $\alpha\in\beta$，即 α 是 β 的真截段，即 $\alpha\subsetneqq\beta$，说 α 小于 β，或说 β 大于 α，记以

$$\alpha<\beta，\text{或记 } \beta>\alpha.$$

应该指出，第三章，§2 定义的自然数之间的 $<$ 同这里是一致的。此外，上节例 3 及注 1 中关于 $<$ 的规定同这定义也是一致的。

【注 1】 由定义不难看出，对于序数 α,β，

$$\alpha\leqslant\beta\Longleftrightarrow\alpha\subset\beta.①$$

把引理 1 用定义中的记号叙述，就是：

【定理 4】 (三歧性)对于任何两个序数 α,β，以下三种情形恰好有一种成立：

$$\alpha=\beta,\ \alpha<\beta,\ \beta<\alpha.$$

在引理 2 中，x,y 是任意的。当 x,y 是序数时也不例外(其实，按上节的定理 2，它们也只能是序数)。于是，用定义中的记号来叙述，引理 2 可写成：

---

① $\alpha\leqslant\beta$ 仍指 $\alpha<\beta\lor\alpha=\beta$。

【定理 5】（传递性）设 α, β, γ 是序数，则

$$\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma.$$

在前面，我们用 $s_\alpha(x)$ 记 $x \in \alpha$ 在序数 α 中的前段，这就是说，$s_\alpha(x)$ 是 α 中一切 $<_\alpha x$ 的元素组成的集合．现在，对于序数 x，我们用 $s(x)$ 记一切 $< x$ 的序数组成的集合：

$$s(x) = \{y \mid y \text{ 是序数且 } y < x\}.$$

我们把 $s(x)$ 叫做序数 x 的绝对前段．以下定理给出一个序数与其绝对前段的关系：

【定理 6】任一序数总等于它的绝对前段，即，如 x 是序数，则

$$s(x) = x.$$

证 设 $y \in s(x)$，则按绝对前段的定义，y 是序数且 $y < x$．按<的定义，得到 $y \in x$．另一方面，设 $y \in x$，则由上节定理 2，y 是序数，于是 $y < x$，故 $y \in s(x)$． ▌

定理 6 说的是，每个序数都是由它前面一切序数组成的良序集（看图 36 并参看图 37）．

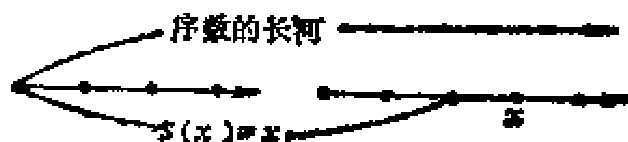


图 36

按上节关于序数的定义，每个序数 α 是一个特殊种类的良序集，它本来有自己的内部顺序 $<_\alpha$．在本节，我们定义了序数之间的绝对顺序 $<$．现在，定理 6 把一切原来的顺序 $<_\alpha$ 都统一到绝对顺序<里边了．事实上，设 α 是序数，且 $x \in \alpha$，则由上节的定理 2，x 也是序数．按定理 6 和序数的定义，

$$s(x)=x=s_\alpha(x).$$

这就是说，对于任何的 $y, x\in\alpha$，

$$y<x \Longleftrightarrow y<_\alpha x.$$

这样，今后就不必区分 $<_\alpha$ 与 $<$，$s_\alpha(x)$ 与 $s(x)$. 因此，除非必要，均可把下标 α 省略了.

同自然数一样（第三章，§5，引理），我们有：

【注 2】 如序数 $\alpha<\beta$，则 $\alpha^+\leqslant\beta$.

请读者自己证明（习题六，1）.

由注 2 不难推出，在序数 α 与其后继者 α^+（按 §2，注 1，α^+ 仍是序数）之间不存在另外的序数.

由上节的定理 1 和本节的定理 6，0 是最小的序数. 现在，0 与 $0^+=1$ 之间没有另外的序数，可见紧跟在 0 的后面的序数是 1. 同样，紧跟在 1 的后面的序数是 2，……. 最小的超限序数是 ω. 紧跟在 ω 后面的序数是 ω^+，紧跟在 ω^+ 后面的序数是 ω^{++}，……（参看图 37）.



从有限序数到开头几个超限序数的示意图

图 37

到此为止，我们已经看到序数保留了自然数的很多性质. 这说明我们所做的从自然数到序数这一推广是卓有成效的. 当然，一般序数并不能保留自然数的所有性质. 一个重要的差异是：每个非零自然数都有先行者（第三章，§2，定理 4），而一般的非零序数就不一定有先行者. 例如，ω 就没有先行者，就是说，不存在序数 β，使 $\beta^+=\omega$.

【定义】 没有先行者的非零序数叫极限序数，即，对于序数α，当且仅当 $\alpha \neq 0$ 且不存在序数β，使 $\beta^{+}=\alpha$，说α是一个极限序数。

例如ω就是一个极限序数，自然数都不是极限序数。

由上面的定理 4，5，我们知道序数之间的顺序$<$具有三歧性和传递性。那么能否说一切序数连同它们之间的顺序组成一个全序集呢？这是不可以的。因为，一切序数太“多”了，形成不了集合(看下面定理 9)。不过，不妨谈论由某些序数组成的集合。这样的集合不但是全序集，而且是良序集：

【定理7】 设A是由序数组成的集合，则$(A, \leqslant)$是良序集。

证 设 $E \subset A$ 且 $E \neq \varnothing$. 取 $\alpha \in E$. 如α是E的最小元，则定理的结论已成立。如果不是这样，可取$\beta \in E$，使$\beta < \alpha$，即$\beta \in \alpha$. 可见 $\alpha \cap E \neq \varnothing$. 因序数$\alpha$是良序集，故其非空子集$\alpha \cap E$有最小元$\gamma$. 我们证明，$\gamma$也是$E$的最小元。事实上，如果不然，则存在 $\delta \in E$，使 $\delta < \gamma$，即 $\delta \in \gamma$. 但 $\gamma \in \alpha$，故由引理 2 关于$\in$的传递性，得到$\delta \in \alpha$. 于是 $\delta \in \alpha \cap E$. 这就同γ是 $\alpha \cap E$ 的最小元矛盾. ∎

【推论】 设A是由序数组成的集合，则$\bigcup(A)$仍是序数.

证 设 $\lambda=\bigcup(A)$. 由于序数的元素仍是序数(§2，定理 2)，故λ仍是以序数为元素的集合。由定理 7，知λ是良序集。为了证实λ是序数，只要再证明对于任何的 $x \in \lambda$，$s_{\lambda}(x)=x$ 就可以了。事实上，由 $x \in \lambda$ 知x属于A中某一序数α. 因α是 $\lambda=\bigcup(A)$ 的一个截段，故 $s_{\lambda}(x)=s_{\alpha}(x)$. 所以 $x=s_{\alpha}(x)=s_{\lambda}(x)$. ∎

设给定由序数组成的一个集合A. 当且仅当存在一个序

数 λ，使对于任何的 $\alpha\in A$，都有 $\alpha\leqslant\lambda$，就说 λ 是集合 A 的一个上界。当且仅当 λ 是 A 的上界，且不存在比它小的上界，就说 λ 是 A 的上确界，或最小上界。关于下界和下确界（或最大下界）有类似的定义。要注意这里的序数集合的上界（下界）是在绝对意义下说的，同第五章，§6 不同，在那里，一个序集 $A\subset X$ 的上界（下界）只是在序集 X 的里面考虑。例如，一切偶数的集合 ω_e，如果在自然数集 ω 里面考虑，它是没有上界的。但在绝对意义下考虑，序数 ω，ω^+ 等等都是 ω_e 的上界，其中 ω 是上确界（参看图 37）。一般，我们有：

【定理 8】 任何由序数组成的集合必有上界。

证 设 A 是序数组成的集合。对 A 求并，设 $\lambda=\bigcup(A)$。由定理 7 的推论，知 λ 仍是序数。以下证明 λ 是 A 的一个上界。事实上，对于任何的 $\alpha\in A$，$\alpha\subset\lambda$，故由注 1，$\alpha\leqslant\lambda$。 ▮

不难继续证明这样得到的 λ 还是 A 的上确界。请读者自己考虑（习题六，3）。

作为本节最后一个问题，我们证明有关序数的一个重要性质：

【定理 9】 不存在一切序数的集合。

证 用反证法。假定 A 是一切序数的集合，则由定理 8，存在序数 λ，使对于任何的 $\alpha\in A$，$\alpha\leqslant\lambda$。这样，λ^+（按 §2，注 1，λ^+ 仍是序数）就严格大于 A 的每一元素，从而 $\lambda^+\notin A$。这就同 A 是一切序数的集合矛盾。 ▮

可见如果承认一切序数组成集合，就会引出悖论。这悖论通常叫做 Burali-Forti 悖论①。

---

① 其实，这悖论最早由 G. Cantor 在 1895年发现，其后由 C. Burali-Forti（这是一个人，不是两个人）重新发现，并在 1897 发表。

§4 替换公理

设给定集合 A，并给定含 x，y 的公式 $\varphi(x, y)$，其中关于 $x\in A$，y 满足单值条件：

$$\forall x\in A\forall y_1\forall y_2(\varphi(x,y_1)\wedge\varphi(x,y_2)\Rightarrow y_1=y_2). \qquad (1)$$

这就是说，对于每个 $x\in A$，满足公式 $\varphi(x, y)$ 的 y 至多有一个。这样，能不能说满足 $\varphi(x, y)$ 的序偶 (x, y)，其中 $x\in A$，形成一个函数呢？我们知道，一个函数首先是序偶组成的一个集合。当然，上述那些序偶 (x, y) 的条件

$$x\in A\wedge\varphi(x, y) \qquad (2)$$

是清楚的。但我们找不到它们的包容集。事实上，固然第一坐标 x 是在 A 的里面，但第二坐标 y 能够跑到哪里就不知道了。所以，用子集公理证明满足条件 (2) 的 (x, y) 形成集合是不行的。其他公理也无济于事。这就需要一个新的公理来保证满足条件(2)的 (x, y) 形成一个函数。这样的承认也很自然。如上所述，一个 x 至多有一个 y 与之对应，可以想象诸 y 不会比诸 x 更"多"，既然诸 x 都在 A 的里面，诸 y 也就应该是有范围的①。

---

① 这不过是直观的解释，希望读者不要受到字面上的愚弄。当我们说某些事物不比另一些事物"多"时，实际指的是一个集合受制于另一集合。但现在并不知道诸 y 形成集合！

替换公理①

设给定集合 A，并给定不含 F 及 B 的公式 $\varphi(x, y)$，满足条件

$\forall x \in A, \forall y_1 \forall y_2(\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \Rightarrow y_1 = y_2)$.

则存在一个函数

$$F = \{(x, y) \mid x \in A \wedge \varphi(x, y)\},$$

从而存在一个集合

$$B = \operatorname{ran}(F) = \{y \mid \exists x \in A \varphi(x, y)\}.$$

应用替换公理时，通常不直接引用函数 F 的存在性，而是引用集合 B 的存在性. 用通俗的话说，后一事实指的是，通过符合条件(1)的公式 $\varphi(x, y)$，由每个 $x \in A$ 至多得到一个 $y = F(x)$，用得到的 y 替换原来的 x，就得到集合 B.

在设立替换公理以后，以前设立的某些公理就变成可以证明的了. 请看以下两例:

【例 1】 利用空集公理，幂集公理和替换公理证明偶集公理.

事实上，按空集公理和幂集公理，空集 $\varnothing$ 和幂集 $\mathscr{P}(\varnothing)$，$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$ 是存在的. $\varnothing$ 和 $\mathscr{P}(\varnothing)$ 是 $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$ 的元素，而且不难证明，$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$ 的元素只能是 $\varnothing$ 或 $\mathscr{P}(\varnothing)$，这两个元素是不相同的: $\varnothing \neq \mathscr{P}(\varnothing)$. 对于任给的集合 a, b，在替换公理中，取 $A = \mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$，并取 $\varphi(x, y)$ 为

$$(x = \varnothing \wedge y = a) \vee (x = \mathscr{P}(\varnothing) \wedge y = b).$$

对于每个 $x \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$(即 $x = \varnothing$ 或 $x = \mathscr{P}(\varnothing)$)，只能

①同子集公理一样，按严格意义，替换公理不是一条公理. 对于每个公式 $\varphi(x, y)$，有一条替换公理 $_\varphi$. 这里列出的是无数多条公理的概括.

有唯一的 y(a 或 b) 满足 $\varphi(x, y)$. 于是按替换公理，存在集合 $B=\{y \mid y=a \vee y=b\}$. 按定义，$B$ 就是偶集 $\{a,b\}$. ▌

【例 2】 利用替换公理证明子集公理.

事实上，设给定集合 A，并设 $C(x)$ 是不含 B 的条件. 取公式 $\varphi(x, y)$ 为

$$C(x) \wedge y=x.$$

对于每个 $x \in A$，至多有一个 y 满足 $\varphi(x, y)$ (当 $C(x)$ 成立时，$y=x$). 按替换公理，存在集合 B，使

$$\forall y(y \in B \Longleftrightarrow \exists x(x \in A \wedge C(x) \wedge y=x)).$$

这等价于，存在集合 B，使

$$\forall y(y \in B \Longleftrightarrow y \in A \wedge C(y)),$$

这就证明了子集公理. ▌

关于公理的小结

到目前为止，我们已经陆续列出了九个公理:

外延公理(第一章，§2). 空集公理(第一章，§2).

子集公理(第一章，§4). 偶集公理(第一章，§5).

并集公理(第一章，§6). 幂集公理(第一章，§9).

无穷公理(第三章，§2). 选择公理(第四章，§4).

替换公理(本节).

在本书，我们只列出这九条公理[①] 作为推理的出发点. 当然，这九条公理并不完全独立，上面已经利用别的公理证明了偶集公理和子集公理. 除这九条公理外，多数集合论教材还增列一条正则公理:

设给定集合 $A \neq \varnothing$. 则存在 A 的成员 x，使 $x \cap A=\varnothing$.

---

① 其中子集公理和替换公理实际都是无穷多条公理的概括.

本书正文不使用这条公理。（作为正则公理的应用，看习题六，13，14，15。）通常把以上十条公理总起来叫做 Zermelo-Fraenkel 公理系统，简记为（ZF）系统①。

§5 计数原理

在§2里，我们希望我们定义的序数是这样一类标准良序集：1)序数概念是自然数概念的推广；2)每一个良序集都恰好有一个与它相似的序数。在§2的例1中，我们看到要求1)是被满足的，每一个自然数都是序数。在§2的注2中，要求2)中序数的唯一性的问题也解决了。在引入替换公理之后，我们将在本节解决要求2)中序数的存在性问题。

设给定良序集 X。我们要证明存在一个序数，与 X 相似。证明的思路如下：直接找到与 X 相似的序数是困难的。我们先不管有没有序数与整个 X 相似，而看它的能与序数相似的截段。例如 X 的截段 $\varnothing$ 与序数 0 相似，非空 X 的截段 $\{x_0\}$，其中 x_0 是最小元，与序数 1 相似。用 Y 记 X 的能与序数 β 相似的截段(图 38)。把这样一切的 Y 并起来，我们期望并集就是整个 X。把相应的序数 β 也并起来，得到一个序数 α。我们期望 X 与序数 α 相似。

【定理 10】（计数原理）对于任何良序集，存在唯一序数与之相似。

证　唯一性已证。以下证明存在性。设 X 是良序集。用 $\mathcal{A}$ 记由 X 的一切截段组成的集合。设 $\varphi(Y,\beta)$ 是由

① 由于包括了有争议的选择公理，有时也记为（ZFC）系统，其中C代表选择公理

"Y 与某一序数 β 相似"

所叙述的公式。由 §2，注 2，对于每个 $Y\in A$，至多有一个 β 使 $\varphi(Y,\beta)$ 成立。因此，按替换公理，存在集合

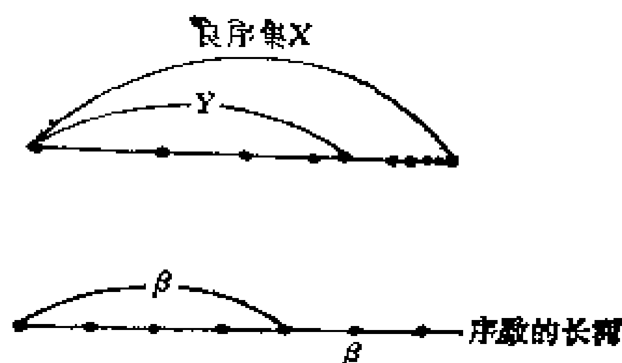


图 38

$$B=\{\beta\,|\,\exists Y\in A\varphi(Y,\beta)\},$$

就是说，B 是一切能与 X 的截段相似的序数的集合。另一方面，记 $W\subset A$ 为一切能与序数相似的 X 的截段的集合：

$$W=\{Y\in A\,|\,\varphi(Y,\beta)\}.$$

对 B 及 W 分别求并，记

$$\alpha=\bigcup(B)①,\quad M=\bigcup(W).$$

由 §3，定理 7 的推论，α 是序数。以下分两步证明 $X\simeq\alpha$。

1) $M\simeq\alpha$. 为了证明，我们将构造一个从 M 到 α 上的相似映射 f 如下：对于每个 $x\in M$，x 必属于某个 $Y\in W$。设 $\beta\in B$ 是与 Y 相似的序数，并用 f_Y 记从 Y 到 β 上的相似映射。规定

$$f(x)=f_Y(x).$$

① 如果没有替换公理，就不能保证 B 是个集合，也就无从对它求并了！参看第一章，§6 关于并集的定义。

这样定义的 f 与 Y 的选择无关. 事实上,设 $x \in Y_1$ 且 $x \in Y_2$, 由于 Y_1, Y_2 都是 X 的截段,其中之一必是另一个的截段. 在较小的截段中引用两良序集间的相似映射的唯一性(第五章, §4, 定理 5), 我们有 $f_{Y_1}(x) = f_{Y_2}(x)$. 这样定义的 $f: M \to \beta$ 是相似映射. 事实上, 对于 $x_1, x_2 \in M$, x_1, x_2 必同属于某一 $Y \in W$. 如 $x_1 < x_2$, 则 $f_Y(x_1) < f_Y(x_2)$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$. 可见 f 严格递增. 其次, $\operatorname{ran}(f) = \alpha$ 是显然的.

2) $M = X$. 首先, M 显然是 X 的截段. 只要证明 M 不是 X 的真截段就可以了. 事实上, 如果 M 是 X 的真截段, 则存在 $\xi \in X$, 使 $M = s_X(\xi)$. 于是 $M \cup \{\xi\} \simeq \alpha^+$. 这样, $M \cup \{\xi\} = \bar{s}_X(\xi)$ 仍是 X 的截段且与序数 α^+ 相似, 从而属于 W, 这就同 M 是 W 中最大截段相矛盾. ▮

计数原理终于解决了本节开始对序数所提的要求 2). 概括地说,序数是一类标准的良序集, 0 是最小的序数, 每个序数由小于它的一切序数组成;对于任何良序集,有唯一的序数与之相似.

我们把与良序集 X 相似的唯一序数 α 叫做 X 的序数, 记作

$$\alpha = \operatorname{ord}(X).①$$

当 X 有限时, X 的序数 $\operatorname{ord}(X)$ 与其元素个数 $N(X)$ (带有 ω 中的顺序) 重合. 又如, 按有理数集的本来的顺序, 良序集 $A = \left\{1 - \frac{1}{n+1} \middle| n \in \omega\right\}$ 的序数是 ω, 良序集 $A \cup \{1\}$ 的序

① ord 是英文 ordinal 的缩写.

数是 ω^+，良序集 $A\cup\left\{1,\frac{3}{2}\right\}$ 的序数是 ω^{++}.

§6* 选择公理的另一等价命题

在第五章，§5，我们曾证明了无序集的可较原理，它主要说的是：对于任何两个集合 A，B，情形 $A\preccurlyeq B$，$B\preccurlyeq A$ 至少有一成立。当时这个原理是用良序化原理证明的。现在，在设立替换公理之后，我们将用无序集的可较原理证明良序化原理。下面，我们暂不假定选择公理成立，即不假定与之等价的良序化原理成立。

【引理】 (Hartogs) 对于任一集合 A，存在一个序数 α，不受制于 A，即 $\alpha\preccurlyeq A$ 不成立。

证 看 A 的一切能赋予良序 $\leqslant_B$ 的子集 B，(并未假定 A 的一切子集——特别是 A 本身——能良序化！)我们先证明一切这样的良序集 $(B,\leqslant_B)$(看成序偶)组成一个集合。事实上，$B\in\mathscr{P}(A)$，而关系 $\leqslant_B$ 是由某些序偶 $(x,y)\in B\times B$ 组成的集合，故 $\leqslant_B$ 是 $B\times B$ 从而是 $A\times A$ 的子集，即 $\leqslant_B\in\mathscr{P}(A\times A)$。可见序偶 $(B,\leqslant_B)\in\mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(A\times A)$。于是按子集公理，

$$W=\{(B,\leqslant_B)\mid B\subset A\wedge\leqslant_B\text{ 是 }B\text{ 的良序}\}$$

是一个集合。按计数原理(§5，定理10)，每一个良序集 $(B,\leqslant_B)$ 有唯一的序数 β 与之相似。在替换公理中，取 $\varphi((B,\leqslant_B),\beta)$ 为

$$\text{“}(B,\leqslant_B)\simeq\text{序数 }\beta\text{”}$$

所叙述的公式，就得到由这样的序数 β 替换原来的 $(B,\leqslant_B)$

而得到的集合

$$M = \{\beta \mid \exists(B, \leqslant_B) \in W((B, \leqslant_B) \simeq \beta)\}.$$

既然 M 是由序数组成的集合，故由 § 3，定理 9，存在序数 $\alpha \notin M$. 以下证明 $\alpha \preccurlyeq A$ 不成立. 事实上，如 $\alpha \preccurlyeq A$ 成立，则 α 与 A 的某一子集 B 等势. 设 f 是从 α 到 B 上的双射. 可以通过 f 把 α 的良序传授给 B: 对于 $\gamma, \delta \in \alpha$, 规定

$$\gamma < \delta \Longleftrightarrow f(\gamma) <_B f(\delta).$$

这样，$\leqslant_B$ 就是 B 的一个良序. 于是 $(B, \leqslant_B) \simeq \alpha$ 且 $(B, \leqslant_B) \in W$. 这就推出了 $\alpha \in M$，与 $\alpha \notin M$ 矛盾. ∎

如果读者仔细检查，就会发现，以上证明中引用的结果都不依赖于选择公理(当然同样不依赖于良序化原理). 不过，在证明中引用了替换公理和利用它推出的计数原理.

下面，我们假定无序集的可较原理成立. 在此假定下，我们证明良序化原理.

任给一个集合 A. 由引理，存在一个序数 α，使 $\alpha \preccurlyeq A$ 不成立. 按无序集的可较原理，$A \preccurlyeq \alpha$ 必成立，即 A 与 α 的某一子集 M 等势. M 当然还是良序的. 设 f 是从 M 到 A 上的双射. 那么，像引理证明的末尾一样，可以通过 f 把 M 的良序传授给 A，得到 A 的良序 $\leqslant_A$. 这就证明了良序化原理. ∎

过去利用良序化原理证明了无序集的可较原理(第五章，§ 5，定理 8 的证明)，现在又利用后者证明了前者. 可见二者等价. 在第五章，§ 8，我们曾经得出结论：选择公理，良序化原理和 Zorn 引理是三个两两等价的命题. 这是在引入替换公理以前得出的结论. 现在，在引入替换公理以后，我们可以得出进一步的结论，在除去选择公理但包含替换公理的 (ZF) 公理系统里，无序集可较原理同以上三个命题也是互相等价

的。

§7 序数的和与积

在第三章，§7，我们曾递推式地定义了自然数的加法和乘法。现在，我们换一个角度来考察这两个运算，先看自然数的加法，例如，看自然数 2 与 3 的和。这里，作为有限良序集，$2=\{0,1\}$，$3=\{0,1,2\}$。我们希望用求并的方法确定 $2+3$。但 $2\cup 3=3$。所以，需要在求并以前对 2 的元素和 3 的元素进行区别。看由序偶组成的良序集：

$$\hat{2}=\{(0,0),(1,0)\},\quad \hat{3}=\{(0,1),(1,1),(2,1)\}.$$

它们互不相交。求 $\hat{2}$ 与 $\hat{3}$ 的并集，得到良序集

$$\hat{2}\cup\hat{3}=\{(0,0),(1,0);(0,1),(1,1),(2,1)\},$$

它的元素个数恰好等于 $5=\{0,1,2,3,4\}$。以下沿着这条路来定义两个序数的和。

【定义】 给定序数 α 与 β，记

$$\hat{\alpha}=\{(x,0)|x\in\alpha\},\quad \hat{\beta}=\{(y,1)|y\in\beta\},$$

并记 $C=\hat{\alpha}\cup\hat{\beta}$。如下定义 C 中的良序：对于任何的 $x,x'\in\alpha$ 及任何的 $y,y'\in\beta$，规定

i) $(x,0)<(y,1)$，

ii) 当且仅当 $x<x'$，$(x,0)<(x',0)$，

iii) 当且仅当 $y<y'$，$(y,1)<(y',1)$。

我们称 $\gamma=\mathrm{ord}(C)$ 为 α 与 β 之和，记为

$$\gamma=\alpha+\beta.$$

用通俗的话说，定义指的是，把序数 α,β 的元素加以区

别后，变成 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$; 把 $\hat{\beta}$ 续在 $\hat{\alpha}$ 的后面，并且在 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ 各自的内部保持原来 α, β 的顺序. 这样得到的良序集 C，它的序数 γ (按计数原理，γ 唯一确定)叫做 $\alpha+\beta$.

注意到在定义中把相应于 β 的 $\hat{\beta}$ 续在相应于 α 的 $\hat{\alpha}$ 的后面，可以预计 $\alpha+\beta$ 不一定等于 $\beta+\alpha$. 例如

$$\omega+1=\omega^+,\ 1+\omega=\omega.$$

关于序数 α, β, γ, 不难验证以下算律:

$$\alpha+0=0+\alpha=\alpha.$$

$$\alpha+1=\alpha^+.$$

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).\ (\text{结合律})$$

由以上例子可知，序数之和的交换律不一般成立.

前面已知自然数(带有 ω 中的序)是序数的特殊情况. 那么，现在定义的加法在 $\alpha=m$, $\beta=n$ 都是自然数时，同第三章，§7 定义的加法一致吗? 只要验证这里定义的加法满足第三章，§7 关于加法的递推定义就可以了. 按以上算律，$m+0=m$; 其次，

$$m+n^+=m+(n+1)=(m+n)+1=(m+n)^+.$$

可见对于自然数来说，这里定义的运算 + 就是第三章，§7 的加法定义中的唯一运算.

以下考虑乘积. 仍从自然数说起. 例如，看自然数 2 与 3 的积. 作为有限良序集，$2=\{0, 1\}$, $3=\{0, 1, 2\}$. 按照以下顺序写出它们的笛卡尔积:

$$2\times 3=\{(0,0),(1,0);(0,1),(1,1);(0,2),(1,2)\},$$

它的元素个数恰好等于 6. 以下是一般的序数之积的定义①:

---

① 与定义序数之和不同，这里没有必要对乘项的元素事先加以区别

【定义】 给定序数 α, β. 记 $C=\alpha\times\beta$, 并如下定义 C 中的良序：对于任何的 $x, x'\in\alpha$ 及任何的 $y, y'\in\beta$, 规定

i) 当且仅当 $y<y'$ 时，$(x, y)<(x', y')$,

ii) 当且仅当 $x<x'$ 时，$(x, y)<(x', y)$.

我们称 $\gamma=\mathrm{ord}(C)$ 为 α 与 β 之积，记作

$$\gamma=\alpha\cdot\beta.$$

用通俗的话说，定义中的笛卡尔积 $C=\alpha\times\beta$ 中的序偶 (x, y) 之间的顺序是如下规定的：不管第一坐标 x 如何，只要第二坐标 y 小，就排在前面；当第二坐标 y 相同，就把第一坐标 x 小的排在前面。这种顺序叫做倒字典顺序。例如，对于 2 与 ω, 笛卡尔积 $2\times\omega$ 的元素是如下排列的：

$$(0, 0), (1, 0); (0, 1), (1, 1); (0, 2), (1, 2); \cdots$$

按定义，这样得到的良序集的序数就是 $2\cdot\omega$. 不难验证这个良序集与 ω 相似. 所以

$$2\cdot\omega=\omega.$$

另一方面，按规定，$\omega\times 2$ 的元素是如下排列的：

$$(0, 0), (1, 0), (2, 0), \cdots; (0, 1), (1, 1), (2, 1), \cdots$$

按定义，这个良序集的序数就是 $\omega\cdot 2$. 显然，这良序集不能与 ω 相似. 这样，$2\cdot\omega$ 与 $\omega\cdot 2$ 尽管等势(都等势于 ω)，但不相似，故 $2\cdot\omega\neq\omega\cdot 2$.

关于序数 α, β, γ, 不难验证以下算律：

$$\alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0.$$

$$\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha.$$

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma). \quad \text{(结合律)}$$

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma. \quad \text{(左分配律)}$$

由上面例子可知，乘法交换律不一般成立。这从乘积是用不可交换的笛卡尔积来定义就可以预料得到的。同样，右分配律 $(\beta+\gamma)\cdot\alpha=\beta\cdot\alpha+\gamma\cdot\alpha$ 也不一般成立。

由以上算律，我们有 $\alpha\cdot 0=0$，且不难推出

$$\alpha\cdot\beta^{+}=\alpha\cdot\beta+\alpha,$$

所以，现在定义的乘法满足第三章，§7 关于乘法的递推定义。因此，当 α, β 是自然数时，这里定义的运算 · 就是那里定义的唯一运算。

以下诸例中，α, β, γ 表任何序数。

【例 1】 $\alpha+\alpha=\alpha\cdot 2$.

事实上，按左分配律，

$$\alpha+\alpha=\alpha\cdot 1+\alpha\cdot 1=\alpha\cdot(1+1)=\alpha\cdot 2. \quad \blacksquare$$

【例 2】 $\beta<\gamma \Rightarrow \alpha+\beta<\alpha+\gamma$.

事实上，设 $\beta<\gamma$，则 β 是 γ 的真截段。记

$$\hat{\alpha}=\{(x, 0)|x\in\alpha\},\ \hat{\beta}=\{(y, 1)|y\in\beta\},$$
$$\hat{\gamma}=\{(z, 1)|z\in\gamma\},$$

则 $\hat{\beta}$ 是 $\hat{\gamma}$ 的真截段，从而 $\hat{\alpha}\cup\hat{\beta}$ 是 $\hat{\alpha}\cup\hat{\gamma}$ 的真截段，故

$$\operatorname{ord}(\hat{\alpha}\cup\hat{\beta})<\operatorname{ord}(\hat{\alpha}\cup\hat{\gamma}),$$

即 $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$. $\blacksquare$

值得注意的是，由 $\beta<\gamma$ 得不出 $\beta+\alpha<\gamma+\alpha$. 请读者举出反例。

【例 3】 $\alpha\neq 0\wedge\beta<\gamma\Rightarrow\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma$.

事实上，由 $\beta<\gamma$ 知 β 是 γ 的真截段，又因 $\alpha\neq 0$，故 $\alpha\times\beta\subsetneqq\alpha\times\gamma$. 以下证明前者是后者的截段(从而是真截段)。事实上，设 $(x, y)\in\alpha\times\beta$，$(x', y')\in\alpha\times\gamma$，且 $(x', y')<(x, y)$。于是，i) 或者 $y'<y$，则由 $y\in\beta$ 推出 $y'\in\beta$，从

而 $(x',y')\in\alpha\times\beta$; (ii) 或者 $y'=y$ 且 $x'<x$，则由 $x\in\alpha$ 推出 $x'\in\alpha$，从而也有 $(x',y')\in\alpha\times\beta$. 可见 $\alpha\times\beta$ 是 $\alpha\times\gamma$ 的真截段，$\mathrm{ord}(\alpha\times\beta)<\mathrm{ord}(\alpha\times\gamma)$，即 $\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma$. ▌

同例 2 类似，从 $\alpha\neq0\wedge\beta<\gamma$ 推不出 $\beta\cdot\alpha<\gamma\cdot\alpha$.

作为以上三个公式的具体例子，我们有，$\omega+\omega=\omega\cdot2$. 对于任何自然数 n，$\omega+n<\omega+\omega=\omega\cdot2$，$\omega\cdot n<\omega\cdot\omega$.

在 § 3 的注 2 的后面，我们曾在一切自然数的后面，陆续列出几个超限序数. 现在继续列下去:

$$0,1,2,\cdots,\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots,$$
$$\omega\cdot2,\omega\cdot2+1,\omega\cdot2+2,\cdots,\cdots,$$
$$\omega\cdot\omega,\omega\cdot\omega+1,\omega\cdot\omega+2,\cdots,\cdots,\cdots,$$
$$\omega\cdot\omega\cdot\omega,\omega\cdot\omega\cdot\omega+1,\omega\cdot\omega\cdot\omega+2,\cdots,\cdots\cdots$$

这样列下去，可以列得很远. 不过要知道，如果只是在 ω 与自然数之间进行有限多次加法和乘法，得到的序数总是可数的.

不可数的序数是存在的. 例如，按良序化原理，赋予连续统(0,1)以良序，得到的良序集必有一个序数(计数原理). 这个序数就是不可数的. 用 ω_1 记最小的不可数序数①，就是说，ω_1 不可数而比它小的任何序数都可数. 这样，在一切可数序数的后面又可以继续列下去:

$$\omega_1,\omega_1+1,\cdots,\omega_1\cdot2,\cdots,\cdots,\omega_1\cdot\omega_1,\cdots,\cdots\cdots$$

这样下去，又可得到许多与 ω_1 等势的序数. 再往后，我们知道，存在集合(例如$\mathscr{P}(\omega_1)$)，使 ω_1 严格受制于这集合，从而存在序数，使 ω_1 严格受制于这序数. 设 ω_2 是这样的序数中最小的一个. 我们又可得到一段与 ω_2 等势的序数. 以此类

① 设 α 是一个不可数序数，看序数的集合 $\{\beta\mid\beta$ 是不可数序数且 $\beta\leqslant\alpha\}$. 按 § 3，定理 7，这非空集合是良序的. 设 ω_1 是它的最小元.

推. 这样，读者似可得到关于"序数长河"的，虽不完整，但总算比较具体的印象.

§8 基 数

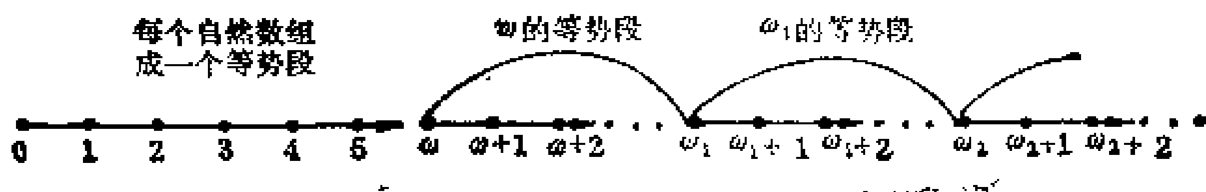
朴素地说，所谓基数指的是集合元素多少的标准，正如§1所说自然数的第1)方面的作用一样. 在这样的理解下，基数问题实际已在第四章就接触到了. 两个集合等势可被看成具有"同样多"的元素，一个集合严格受制于另一集合可被看成前者的元素"少于"后者. 这样，基数作为集合元素多少的标准，有的提法是"当且仅当两集合等势(即它们之间存在双射)时，说它们有相同的势；势也叫做基数". 但这并未指明"势"("基数")本身到底是什么. 另一种提法是"与A等势的一切集合的共同性质叫做A的基数". 但"共同性质"这一词太含糊了. 在集合论里，我们考虑的实体只有集合，"共同性质"是怎样一个集合呢? 一种很自然的提法是"与A等势的一切集合组成的集合$[A]$叫做A的基数". 可惜的是，对于$A\neq\varnothing$，$[A]$太大了，不能是一个集合. 事实上，如与$A\neq\varnothing$等势的一切集合形成集合$[A]$. 取$a\in A$，那么，对于任何的集合b，构造集合

$$B_b=\begin{cases}A, & \text{当 } b\in A,\\ (A-\{a\})\cup\{b\}, & \text{当 } b\notin A,\end{cases}$$

则$B_b\approx A$，即$B_b\in[A]$. 取$[A]$作包容集，由子集公理，知一切B_b组成集合M，从而$\cup(M)$是集合. 但后者包含任一集合b，这是不可能的(第一章，§4，定理2).

我们准备利用序数定义基数. 在上节末尾，我们依次列

出一系列的序数，其中ω是最小超限序数，ω_1是最小不可数序数，ω_2是使$\omega_1 \prec \omega_2$的最小序数．在序数的长河里，每个有限序数——自然数只与自己等势；ω与在其后且在ω_1之前的一切序数等势；ω_1与在其后且在ω_2之前的一切序数等势，以此类推．这样，不妨把依次排列的序数划分成"等势段"(参看图39)．任何一个无序集A当它按良序化原理良序化以后，它就按计数原理有了一个序数．这序数总要在某一"等势段"里，这样，A就与这段的每个序数等势．看来，从每一"等势段"推选一个代表——显然用最小数作代表是最方便的——用它们作为衡量集合元素多少的标准——基数——就是很自然的了．



序数的长河被划分为等势段

图 39

以下是正式的定义：

【定义】 一个序数α叫做一个基数，当且仅当对于任何序数β，$\alpha \approx \beta \Rightarrow \alpha \leqslant \beta$．

例如，每个自然数是基数，ω也是基数，这是容易验证的．凡是无穷的基数叫超限基数．例如ω就是一个超限基数．注意，ω还是极限序数(看§3的有关定义)．这一性质为超限基数所共有：

【注】 每一超限基数必是极限序数①.

事实上,设 a 是超限基数. 如果存在序数 β, 使 $a=\beta^+$, 则 β 必是无穷的. 不难构造 β^+ 到 β 上的双射, 即 $\beta^+\approx\beta$. 这样, $a\approx\beta$ 且 $\beta<a$, 就与基数的定义相违背. ▮

今后对于自然数,不论作为序数或基数,我们都采用同样的记号,如, 0, 1, n 等等,不加区别. 对于 ω, 当它作为基数考虑时,为了区别,就用 $\aleph_0$② 来记. 此外,最小的不可数序数 ω_1 也是基数. 对于 ω_1, 当它作为基数考虑时, 为了区别,就用 $\aleph_1$ 来记. 同 $\aleph_0$ 一样, $\aleph_1$ 也是超限基数.

应该指出,尽管按定义基数是序数的特殊情况,但作为衡量元素多少的标准,我们就不再考虑它们各自的内部顺序了. 另一方面,既然准备用基数作为衡量元素多少的标准,我们必须考虑基数之间的大小顺序. 关于基数之间的顺序, 不再另作定义,我们规定:

基数之间的顺序仍按它们作为序数的顺序, 即对于基数 a, b, $a<b\Leftrightarrow a\in b\Leftrightarrow a\subsetneqq b$.

同序数的情形一样,对于两个基数 a, b,

$$a\leqslant b\Leftrightarrow a\subset b.$$

§9 无序集的基数

对于基数来说,最根本的问题是,它们能否作为衡量元素多少的标准? 确切地说,对于任何集合,是否存在唯一的基数与之等势? 以下的定理 11 作出肯定的答复. 为了证明,先看

① 逆命题不一般成立. 例如 $\omega\cdot 2$, $\omega\cdot\omega$, 等等.

② $\aleph$ 是希伯来文第一个字母,读为 "aleph".

下述引理. 在上节, 我们知道与一个非空集合等势的一切集合组成不了集合,但是我们有:

【引理】 与给定集合A等势的一切序数组成一个集合①.

证 首先证明与A等势的一切序数β小于某一序数. 看A的幂集$\mathscr{P}(A)$. 按良序化原理, 使$\mathscr{P}(A)$良序化. 再按计数原理, 设π是$\mathscr{P}(A)$的序数. 则对于一切序数$\beta \approx A$, 必有$\beta < \pi$. 事实上,如存在序数$\beta_0 \approx A$且$\pi \leqslant \beta_0$, 则$\mathscr{P}(A) \approx \pi \subset \beta_0 \approx A$, 这就得到$\mathscr{P}(A) \prec A$, 与第四章, § 3, 定理 5 矛盾. 故这里的每个$\beta < \pi$, 即$\beta \in \pi$. 取π作包容集,则由子集公理可知一切序数$\beta \approx A$组成一个集合. ▌

用M记引理中的集合:

$$M = \{\beta | \beta \text{ 是序数且 } \beta \approx A\}.$$

由 § 3, 定理 7, 知 $M \neq \varnothing$ 良序. 设α是M的最小元,不难验证α就是与A等势的唯一基数. 这就是:

[定理 11] (集合的基数存在原理) 对于任何集合A,存在唯一基数α, 使$\alpha \approx A$.

我们把与集合A等势的唯一基数α叫做A的基数, 记作

$$\alpha = \operatorname{car}(A). \text{②}$$

集合A的基数$\operatorname{car}(A)$就是与A等势的诸序数中最小的一个.

当A有限时,

$$\operatorname{car}(A) = N(A).$$

对于自然数n, 我们有 $N(n) = n$ (第四章, § 2). 对于基数,同样有

① 这集合就是上面说的,与A等势的序数组成的等势族.

② car 是英文 cardinal 的缩写.

【注 1】 如 a 是基数，则 $\mathrm{car}(a)=a$。

这是因为 $\mathrm{car}(a)$ 是与 a 等势的唯一基数。 ▌

对于自然数 m, n，我们有 $m\approx n\Rightarrow m=n$（第四章，§2，引理 2）。对于基数，同样有

【注 2】 如 a, b 是基数，则 $a\approx b\Rightarrow a=b$。

事实上，由 $a\approx b$ 知 $a=\mathrm{car}(b)$，又由注 1，$\mathrm{car}(b)=b$。 ▌

【注 3】 如 a, b 是基数，则 $a\prec b\Longleftrightarrow a<b$。

事实上，设 $a\prec b$。如 $b\leqslant a$，则 $b\subset a$，于是 $b\preccurlyeq a$，就与假设矛盾。另一方面，设 $a<b$，则 $a\subsetneqq b$。于是 $a\preccurlyeq b$ 且 $a\neq b$。按注 2，$a\preccurlyeq b$ 且 a 不与 b 等势。 ▌

【定理 12】 $\mathrm{car}(A)=\mathrm{car}(B)\Longleftrightarrow A\approx B$。

证 $\Longrightarrow$ 部分显然。至于 $\Longleftarrow$ 部分，由 $A\approx B$ 推出

$$\mathrm{car}(A)\approx\mathrm{car}(B).$$

按注 2，得到 $\mathrm{car}(A)=\mathrm{car}(B)$。 ▌

这就是我们在§8开始所设想的："当且仅当两集合等势时，它们有相同的基数"。

作为定理 12 的例示，我们有：

【例 1】 无穷可数集都具有基数 $\aleph_0$。

【例 2】（连续统的基数） 我们把实数区间 $(0, 1)$ 叫连续统（第四章，§3）。用 $\mathbf{c}$ 记连续统的基数。凡与连续统等势的集合，如 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}$ 中的任何非退化区间，2^{ω}，等等都具有基数 $\mathbf{c}$。

在第四章，我们把两集合 A，B 等势设想为它们拥有"一样多"的元素。那只是直观的看法。在引入基数概念之后，问题明确化了。定理 12 告诉我们，A 与 B 等势就是它们具有相同的基数。另外，在第四章，我们把集合 A 受制于（严格受制

于)集合B直观地设想为A的元素"不多于"("少于")B的元素．以下的定理13将告诉我们，A受制于(严格受制于)B就是A的基数不大于(小于)B的基数．

【定理13】 1) $\mathrm{car}(A)<\mathrm{car}(B)\Longleftrightarrow A\prec B$.

2) $\mathrm{car}(A)\leqslant\mathrm{car}(B)\Longleftrightarrow A\preccurlyeq B$.

证 1) 因 $\mathrm{car}(A)\approx A$, $\mathrm{car}(B)\approx B$, 故甚易证明 $\mathrm{car}(A)\prec\mathrm{car}(B)\Longleftrightarrow A\prec B$. 但由注3,

$$\mathrm{car}(A)<\mathrm{car}(B)\Longleftrightarrow\mathrm{car}(A)\prec\mathrm{car}(B).$$

2) 把1)中结果与注2结合就可以了. ∎

例如，ω严格受制于区间$[0, 1)$，(第四章，§3，注1的例)故

$$\aleph_0<\mathbf{c}.$$

又如，对于任何集合A, $A\prec\mathscr{P}(A)$ (第四章，§3，定理5)，故

$$\mathrm{car}(A)<\mathrm{car}(\mathscr{P}(A)).$$

又如，对于任何无穷集 A, $\omega\preccurlyeq A$ (第四章，§5，定理10)，故

$$\text{对于任何超限基数 } a,\ \aleph_0\leqslant a.$$

这说明 $\aleph_0$ 是最小的超限基数.

作为定理12，13的一个应用，我们重新证明第四章，§3的 Schröder-Bernstein 定理：设 $A\preccurlyeq B$ 且 $B\preccurlyeq A$，则

$\mathrm{car}(A)\leqslant\mathrm{car}(B)$且$\mathrm{car}(B)\leqslant\mathrm{car}(A)$，故$\mathrm{car}(A)=\mathrm{car}(B)$，于是$A\approx B$. ∎

应该指出，这里应用定理12，13首先要肯定每个集合有唯一的基数——定理11；而定理11是利用它的引理推出的．在引理的证明中，我们引用了良序化原理（利用选择公理推出）和计数原理（利用替换公理推出）．而在第四章给出的 Schröder Bernstein 定理的证明则是在列出选择公理以前．这

就是说，虽然在设立选择公理和替换公理以后可以轻而易举地证明这一定理，而这一定理却可不依赖于这两条公理而得到证明。

最后我们给出与§3，定理8，9相应的基数的性质：

【定理14】 对于任何由基数组成的集合A，存在一个基数l，为A的上界。

证 由定理8，存在一个序数λ，为A的上界，即对于每个基数$b\in A$，$b\leqslant\lambda$，即$b\subset\lambda$。于是由定理13，$b\leqslant\mathrm{car}(\lambda)$。取 $l=\mathrm{car}(\lambda)$。 ∎

【定理15】 不存在一切基数的集合。

证 如A是一切基数的集合，则按定理14，设l是A的上界。又设 $p=\mathrm{car}(\mathscr{P}(l))$，则 $l<p$。这样，基数p就大于A中一切基数，与A是由一切基数组成的假设矛盾。 ∎

§10　基数的和·积

按定义，基数是序数的特殊情况。在序数的长河里，我们实际是把§8所谓的每个"等势段"中的最小序数叫做基数。这样，在"序数的长河"里，除有限基数(自然数)外，超限基数是"大步前进"的。例如，从最小超限基数 $\aleph_0=\omega$ 开始，越过了$\omega+1$，$\omega+2,\cdots,\omega\cdot2,\cdots,\omega\cdot3,\cdots,\omega\cdot\omega,\cdots,\omega\cdot\omega\cdot\omega,\cdots$，多到不可数的序数，"达到"次一个基数 $\aleph_1=\omega_1$——最小的不可数序数。要想达到再次一个基数，还要越过"更多"的序数。在§8，我们规定基数之间的顺序沿袭序数之间的顺序。这是出于这样的考虑：不论"步子"跨得多大，在前总是在前，在后总是在后。同时，在这样的规定下，我们推

出了基数之间的<恰好相当于集合之间的 $\prec$，这正是我们希望的。

至于基数的加法和乘法，就不能再沿袭序数的加法和乘法的定义了。这是因为，按照序数的有关定义，求得两基数的和或积固然是序数，但不一定是基数。例如，$\omega=\aleph_0$ 与 1 都是基数，如按序数加法的定义，ω 与 1 的和 ω^+，就不再是基数了。基数概念实际来源于等势。我们将以等势为线索，定义基数的加法和乘法。

【引理 1】 如 $A_1\approx A_2$，$B_1\approx B_2$，且 $A_1\cap B_1=A_2\cap B_2=\varnothing$，则 $A_1\cup B_1\approx A_2\cup B_2$。

证 设 f 是从 A_1 到 A_2 上的双射，g 是从 B_1 到 B_2 上的双射，则 $f\cup g$ 就是从 $A_1\cup B_1$ 到 $A_2\cup B_2$ 上的双射。 ▮

【定义】 设 a, b 是基数，且集合 A, B 满足条件：

$$\mathrm{car}(A)=a,\ \mathrm{car}(B)=b,\ A\cap B=\varnothing.$$

称 $c=\mathrm{car}(A\cup B)$ 为 a 与 b 的和，记作

$$c=a+b.$$

由引理 1 可知，定义中的和 $a+b$ 不依赖于集合 A, B 的选取。其次，对于任何的基数 a, b，满足定义条件的集合 A，B 是存在的，例如，可取

$$A=\{(x,0)\mid x\in a\},\ B=\{(y,1)\mid y\in b\}.$$

【注 1】 按定义，如 $A\cap B=\varnothing$，则

$$\mathrm{car}(A\cup B)=\mathrm{car}(A)+\mathrm{car}(B).$$

应该指出，基数的加法虽仍用+来记，但同序数的加法是有区别的。例如，按序数的加法，$\omega+1=\omega^+$，但按基数的加法，$\aleph_0+1=\aleph_0$（请验证）。

关于基数的加法，不难验证以下算律：

$a + 0 = a$.

$(a + b) + c = a + (b + c)$.（结合律）

$a + b = b + a$.（交换律）

自然数是基数的特殊情况。以下证明，对于任何自然数 m, n，现在定义的加法满足第三章，§7 关于加法的递推定义：

$$1)\ m + 0 = m,\quad 2)\ m + n^+ = (m + n)^+.$$

这里，1) 是 $a + 0 = a$ 的特殊情况。我们证明 2)。首先证明 $n^+ = n + 1$（注意，这是基数的加法）。事实上，$n^+ = n \cup \{n\}$，且按定义，$n + 1 = \operatorname{car}(n \cup B)$，其中与 n 不相交的 $B \approx 1 = \{0\}$ 可取为 $B = \{1\}$。不难看出 $n^+ \approx n \cup B$。由等式 $n^+ = n + 1$ 及结合律就可推出 2)。 ▮

由此可见，对于自然数来说，现在定义的运算＋就是第三章，§7 的加法定义中的唯一运算。

以下是与 §7，例 2 类似的性质：

【引理 2】 设 a, b, c 是基数，则

$$a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c.$$

事实上，取 $A = \{(x, 0) \mid x \in a\}$，$B = \{(y, 0) \mid y \in b\}$，$C = \{(z, 1) \mid z \in c\}$。则 $A \approx a$，$B \approx b$，$C \approx c$，且 $A \cap C = B \cap C = \varnothing$。按题设，$a \subset b$，故 $A \subset B$，$A \cup C \subset B \cup C$，于是 $a + c \leqslant b + c$。 ▮

应该注意，即使在引理 2 的题设中去掉等号，在结论中也不能去掉等号。例如，$0 < 1$，但 $0 + \aleph_0 = \aleph_0 = 1 + \aleph_0$。

【例 1】 $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

事实上，记 $A = \{(n, 0) \mid n \in \omega\}$，$B = \{(n, 1) \mid n \in \omega\}$，则 $A \approx B \approx \omega$ 且 $A \cap B = \varnothing$。设

$$f(x)=\begin{cases}2\cdot n, & 当\ x=(n,0),\\ 2\cdot n+1, & 当\ x=(n,1),\end{cases}$$

则 $f: A\cup B\to\omega$ 是双射。 ▮

【例 2】 设 n 是自然数，则

$$\aleph_0+n=\aleph_0$$

事实上，由于任何自然数 $n<\aleph_0$，故由引理 2 及例 1，$\aleph_0+n\leqslant\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$，但 $n\geqslant 0$，故又有 $\aleph_0+n\geqslant\aleph_0$. 最后得到 $\aleph_0+n=\aleph_0$. ▮

最后的公式可推广如下：

【例 3】 设 n 是自然数，a 是超限基数，则

$$a+n=a.$$

事实上，设 $\hat{n}=\{(i,0)\mid i\in n\}$. 只要证明 $a\cup\hat{n}\approx a$ 就可以了. 注意到 $\aleph_0$ 是最小超限基数(§9，定理 13 的例)，故 $\omega\subset a$. 如下定义 $f: a\cup\hat{n}\to a$：

$$f(x)=\begin{cases}i, & 当\ x=(i,0)\in\hat{n},\\ i+n, & 当\ x=i\in\omega,\\ x, & 当\ x\in a-\omega.\end{cases}$$

不难验证 f 是从 $a\cup\hat{n}$ 到 a 上的双射。 ▮

例 1 的公式可推广如下：

【引理 3】 设 a 是超限基数，则

$$a+a=a.$$

证 我们利用 Zorn 引理(第五章，§6，定理 9)进行证明. 为了区别，记

$$\bar{a}=\{(x,0)\mid x\in a\},\ \hat{a}=\{(x,1)\mid x\in a\}.$$

如 X 是 a 的子集，则用 X', X'' 记 $\bar{a}$, $\hat{a}$ 的相应子集：

$$X'=\{(x,0)\mid x\in X\},\ X''=\{(x,1)\mid x\in X\}.$$

暂时不管有没有从 $\acute{a}\cup\hat{a}$ 到 a 上的双射，我们考虑可能的从 $X'\cup X''$ 到 X 上的双射 f，其中 $X\subset a$。用 F 记一切这样 f 的集合。现在看包容序集 $(F,\subset)$。对于 $f,g\in F$，所谓 $f\subset g$ 就指函数 g 是函数 f 的延拓(参看习题二，19)。以下对序集 $(F,\subset)$ 引用 Zorn 引理：

1) $F\neq\varnothing$。事实上，可取 $X=\varnothing$，则 $X'=X''=\varnothing$。从 $\varnothing\cup\varnothing$ 到 $\varnothing$ 上的双射 $\varnothing\in F$(习题二，17，18)。

2) $(F,\subset)$ 关于链的并封闭。事实上，设 $C\subset F$ 是一个链(即对于任何的 $f,g\in C$，或者 g 是 f 的延拓，或者 f 是 g 的延拓)。显然 $\varphi=\bigcup(C)$ 是函数。记 $\bar{X}=\operatorname{ran}(\varphi)\subset a$。不难验证 $\operatorname{dom}(\varphi)=\bar{X}'\cup\bar{X}''$，其中 $\bar{X}'$ 与 $\bar{X}''$ 是与 $\bar{X}$ 相应的 $\acute{a}$ 与 $\hat{a}$ 的子集。也不难验证 φ 是单射。这样，φ 就是从 $\bar{X}'\cup\bar{X}''$ 到 $\bar{X}$ 上的双射。故 $\varphi\in F$。

于是由 Zorn 引理，F 有极大元 f_0：$X_0'\cup X_0''\to X_0$，其中 $X_0\subset a$。以下证明 $a-X_0$ 是有限的。事实上，如 $a-X_0$ 无穷，我们就可取它的一个无穷可数子集 Y。相应地，得到 $\acute{a}-X_0'$ 与 $\hat{a}-X_0''$ 的无穷可数子集 Y',Y''。存在从 $Y'\cup Y''$ 到 Y 上的双射 h(例 1)。于是 $h\in F$。现在，$\operatorname{dom}(f_0)=X_0'\cup X_0''$，$\operatorname{dom}(h)=Y'\cup Y''\subset(\acute{a}-X_0')\cup(\hat{a}-X_0'')$，二者不相交，故 $f_0\cup h$ 是函数，且属于 F。因 $f_0\cap h=\varnothing$，故按包容序，函数 $f_0\cup h$ 严格大于 f_0。这就同 f_0 是 F 中极大矛盾。

既然 $a-X_0$ 有限，那么，由于 a 无穷，故 X_0 无穷。按例 3，由于 $a=(a-X_0)\cup X_0$，故 $a=\operatorname{car}(a)=\operatorname{car}(X_0)$。同样，$\acute{a}\approx X_0'$，$\hat{a}\approx X_0''$。

最后，因 $f_0\in F$，故 $X_0'\cup X_0''\approx X_0$，于是

$$a+a=\operatorname{car}(X_0'\cup X_0'')=\operatorname{car}(X_0)=a.$$ ▌

用引理 3 可以证明超限基数的一个很重要的性质:

【定理 16】 (吸收律)设 a 是超限基数，且基数 $b\leqslant a$，则

$$a+b=a.$$

证 由引理 2，$a+b\geqslant a$. 又由引理 2，3，$a+b\leqslant a+a=a$. 故 $a+b=a$. ▌

例 1-3 的结果都成为吸收律的特例.又如,对于任何超限基数 a,$a+\aleph_0=a$. 吸收律说的是,当一个超限基数同任何不超过它的基数相加时，加上的基数(不论有限成超限)就被原来的超限基数所吸收，相加的结果仍是原来的超限基数.

加法吸收律还可说成: 如基数 a，b 至少有一超限，则 $a+b$ 等于 a，b 中的最大者.

用第四章的术语,加法吸收律又可说成:一个无穷集 A 与任何受制于它的集合 B 的并集 $A\cup B$ 和 A 等势.

以上讲的是两个基数的和.下面定义任意多个基数的和.

【定义】 设给定由基数组成的族 $(a_i)_{i\in I}$ (其中标集 I 可以是任何集合). 设族 $(A_i)_{i\in I}$ 的项两两不相交,且对每个 $i\in I$，$\operatorname{car}(A_i)=a_i$. 称 $c=\operatorname{car}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)$ 为诸 a_i 的和,记为

$$c=\sum_{i\in I}a_i ①.$$

当 $I=2$ 时,我们记

① 可以证明，$\sum_{i\in I}a_i$ 不依赖于族 $(A_i)_{i\in I}$ 的选取.

$$\sum_{i\in 2} a_i = a_0 + a_1,$$

这就指前面所说的两基数的和。当 $I = 3$ 时,通常记

$$\sum_{i\in 3} a_i = a_0 + a_1 + a_2,$$

等等。

看一个无穷和的例子。取 $I = \boldsymbol{R}$。如每个 $a_i = 1$,记 $\sum_{i\in \boldsymbol{R}} a_i$ 为 $\sum_{i\in \boldsymbol{R}} 1$。不难看出 $\sum_{i\in \boldsymbol{R}} 1 = \mathrm{car}(\boldsymbol{R}) = \mathbf{c}$。

由于对集族的并来说,交换律和结合律成立(第二章,§9),所以,基数的和 $\sum_{i\in I} a_i$ 满足交换律和结合律。

以下谈论两基数的积。先看以下引理:

【引理 4】 如 $A_1 \approx A_2$, $B_1 \approx B_2$, 则 $A_1 \times B_1 \approx A_2 \times B_2$。

这是不难验证的。

【定义】 设 a, b 是基数,且集合 A, B 满足条件:

$$\mathrm{car}(A) = a, \ \mathrm{car}(B) = b.$$

称 $c = \mathrm{car}(A \times B)$ 为 a 与 b 的积,记作

$$c = a \cdot b.$$

由引理 4 可知,定义中的 $a \cdot b$ 不依赖于集合 A, B 的选取,特别是,可简单地取 $A = a$, $B = b$。

【注 2】 按定义,我们有

$$\mathrm{car}(A \times B) = \mathrm{car}(A) \cdot \mathrm{car}(B).$$

应该指出,基数的乘法虽仍用 · 来记,但同序数的乘法是有区别的。例如,按序数的乘法,ω 与 2 的积是 $\omega \cdot 2 \neq \omega$,但按基数的乘法,$\aleph_0$ 与 2 的积 $\aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0$ (请验证)。

现在看乘法与加法的联系。按照人们在小学算术中的认识，自然数的乘法就是相同加项的累加，例如 $2\cdot 3=2+2+2$。在基数的运算中，情况是一样的。设 a，u 都是基数。看和 $\sum\limits_{i\in u} a$ $\left(\text{这指的是 } \sum\limits_{i\in u} a_i\text{，其中每个 } a_i=a\right)$。按定义，$\sum\limits_{i\in u} a=\operatorname{car}\left(\bigcup\limits_{i\in u}\hat{a}_i\right)$，其中对每个 i，$\hat{a}_i=\{(x,i)\mid x\in a\}$。于是

$$\bigcup_{i\in u}\hat{a}_i=\{(x,i)\mid x\in a\wedge i\in u\}=a\times u.$$

两端取基数，得到：

【注 3】 $\sum\limits_{i\in u} a=a\cdot u.$

用通俗的话说，这就是"u 个 a 的和等于 a 乘以 u"。这一结论不难推广为：对于任何的标集 I，

$$\sum_{i\in I} a=a\cdot \operatorname{car}(I).$$

关于基数的乘法，不难验证以下算律：

$a\cdot 0=0.$

$a\cdot 1=a.$

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.（结合律）

$a\cdot b=b\cdot a$.（交换律）

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.（分配律）

由以上算律不难推出，现在定义的乘法满足第三章，§7 关于乘法的递推定义。所以，对于自然数来说，现在定义的运算·就是第三章，§7 的乘法定义中的唯一运算。

【例 4】（一般的分配律） $a\cdot\sum\limits_{i\in I} b_i=\sum\limits_{i\in I}(a\cdot b_i).$

事实上，取 $(B_i)_{i\in I}$，使对每个 $i\in I$，$\operatorname{car}(B_i)=b_i$，且诸 B_i 两两不相交。按定义，$a\cdot\sum_{i\in I}b_i=\operatorname{car}\left(a\times\bigcup_{i\in I}B_i\right)$。不难验证 $a\times\bigcup_{i\in I}B_i=\bigcup_{i\in I}(a\times B_i)$。两边取基数，得到 $a\cdot\sum_{i\in I}b_i=\sum_{i\in I}(a\cdot b_i)$。 ∎

【引理 5】 $a\leqslant b\Rightarrow a\cdot c\leqslant b\cdot c$。

证明留给读者。应该指出，在这不等式中，即使 $c\neq 0$，左边去掉等号也不能一般地导致右边去掉等号。例如，$1<2$，但 $1\cdot\aleph_0=\aleph_0=2\cdot\aleph_0$。

【例 5】 $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$。

这是因为 $\omega\times\omega=\omega$。 ∎

关于一般超限基数的自乘，我们有类似于引理 3 所述的性质：

【引理 6】 设 a 是超限基数，则

$$a\cdot a=a.$$

可仿照引理 2 的证法进行证明，留给读者作练习。

【定理 17】 （吸收律）设 a 是超限基数，且 $1\leqslant b\leqslant a$，则

$$a\cdot b=a.$$

这只要把引理 5，6 结合起来就可以了。

乘法吸收律说的是，当一个超限基数同任何不超过它的非零基数（不论有限或超限）相乘时，后一基数就被原来的超限基数所吸收，相乘的结果仍是原来的超限基数。

例 5 是吸收律的特例。又如，对于任何超限基数 a，$a\cdot$

$\aleph_0 = a \cdot n = a$，其中 n 是非零自然数。

吸收律还可说成：如基数 a，b 都非零且至少有一超限，则 $a \cdot b$ 等于 a，b 中的最大者。

用第四章的术语，乘法吸收律可以说成：一个无穷集 A 与任何受制于它的非空集合 B 的笛卡尔积 $A \times B$ 与 $B \times A$ 都同 A 等势。

乘积概念不难推广到任意多个乘项的情况：

【定义】 设给定基数族 $(a_i)_{i \in I}$，且对于每个 $i \in I$，$A_i \approx a_i$。称 $c = \operatorname{car}\left(\bigtimes_{i \in I} A_i\right)$ 为诸 a_i 的积，记为

$$c = \prod_{i \in I} a_i.$$

可以证明，$\prod_{i \in I} a_i$ 不依赖于族 $(A_i)_{i \in I}$ 的选取。基数的积 $\prod_{i \in a} a_i$ 满足交换律和结合律。

当 $I = 2$ 时，记

$$\prod_{i \in 2} a_i = a_0 \cdot a_1.$$

在本节的末尾，作为基数算术的应用，我们重新证明第四章，§5，定理9：可数个可数集的并集可数。

为此，请读者先证明以下两个关于基数的性质：

I. 给定集族 $(A_i)_{i \in I}$（其中诸 A_i 两两可以相交以至重合）。设对于每个 $i \in I$，$\operatorname{car}(A_i) = a_i$，则

$$\operatorname{car}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leqslant \sum_{i \in I} a_i$$

（习题六，35）。

II. 给定基数族 $(a_i)_{i\in I}$，$(b_i)_{i\in I}$。设对于每个 $i\in I$，$a_i\leqslant b_i$，则 $\sum_{i\in I} a_i\leqslant\sum_{i\in I} b_i$（习题六，36）。

现在证明定理（第四章，定理 9）：

给定集族 $(A_i)_{i\in I}$（其中诸 A_i 两两可以相交以至重合）。设 $I\preccurlyeq\omega$ 且每个 $A_i\preccurlyeq\omega$，则 $\bigcup_{i\in I} A_i\preccurlyeq\omega$。

事实上，记 $\operatorname{car}(A_i)=a_i$，其中每个 $a_i\leqslant\aleph_0$。由性质 I，$\operatorname{car}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\leqslant\sum_{i\in I} a_i$。由性质 II，$\sum_{i\in I} a_i\leqslant\sum_{i\in I}\aleph_0$。由注 3，$\sum_{i\in I}\aleph_0=\aleph_0\cdot\operatorname{car}(I)\leqslant\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$。最后得到

$$\operatorname{car}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\leqslant\aleph_0.\qquad\blacksquare$$

读者可从以上定理的证明中看到基数算术的作用：当我们把第四章的等势与受制的问题化为基数的“＝”与“$\leqslant$”的问题后，利用基数算术的算律，可以把问题简单地解决。在习题六第38，41，42题中还可看到更多的例示。

§11　基数的幂

在第二章，§6，定理 7 中，我们曾证明，对于给定的集合 X，Y，从 X 到 Y 内的一切映射形成一个集合，记作 Y^X。关于集合 Y^X，我们有以下一些性质：

【引理 1】 如 $A_1\approx A_2$，$B_1\approx B_2$，则 $A_1^{B_1}\approx A_2^{B_2}$。

证　设 f 是从 A_1 到 A_2 上的双射，g 是从 B_1 到 B_2 上

的双射．我们需要构造一个从映射的集合 $A_1^{B_1}$ 到另一映射的集合 $A_2^{B_2}$ 上的双射．定义 $H: A_1^{B_1} \to A_2^{B_2}$ 如下：对于每个从 B_1 到 A_1 内的映射 j，令

$$H(j) = f \circ j \circ g^{-1}$$

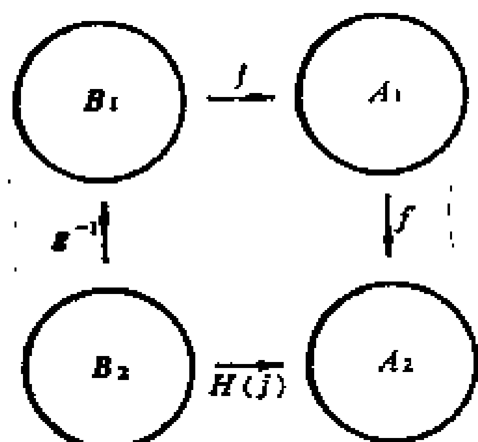


图 40

(参看图 40)．首先证明H是单射．事实上，如 j 和 j' 是从 B_1 到 A_1 内的不同映射：$j \neq j'$，即存在某个 $x \in B_1$，使 $j(x) \neq j'(x)$．这样就有

$$H(j)(g(x)) = (f \circ j \circ g^{-1})(g(x)) = (f \circ j)(x) = f(j(x)),$$
$$H(j')(g(x)) = (f \circ j' \circ g^{-1})(g(x)) = (f \circ j')(x) = f(j'(x)).$$

因 f 是单射，故 $f(j(x)) \neq f(j'(x))$，即映射 $H(j)$ 与 $H(j')$ 在 $g(x) \in B_2$ 的值不同，于是映射 $H(j) \neq H(j')$．可见H是单射．其次证明H是从 $A_1^{B_1}$ 到 $A_2^{B_2}$ 上的满射．事实上，对于任何的 $k: B_2 \to A_2$，取 $j = f^{-1} \circ k \circ g$，它是从 B_1 到 A_1 内的映射．于是，$H(j) = f \circ (f^{-1} \circ k \circ g) \circ g^{-1} = k$．可见$H$是从 $A_1^{B_1}$ 到 $A_2^{B_2}$ 上的满射． ▌

【引理 2】 如 $B \cap C = \varnothing$，则

$$A^{B \cup C} \approx A^B \times A^C.$$

证 这里 $f\in A^{B\cup C}$ 指 f 是从 $B\cup C$ 到 A 内的映射，$(g, h)\in A^B\times A^C$ 指 g 是从 B 到 A 内的映射且 h 是从 C 到 A 内的映射。定义 $H: A^{B\cup C}\to A^B\times A^C$ 如下：对于每个 $f\in A^{B\cup C}$，令

$$H(f)=(f\upharpoonright B, f\upharpoonright C).$$

显然 H 是单叶的。此外，对于每个 $(g,h)\in A^B\times A^C$，取 $f=g\cup h$。因 $\mathrm{dom}(g)=B$，$\mathrm{dom}(h)=C$ 且 $B\cap C=\varnothing$，故 f 是从 $B\cup C$ 到 A 内的函数，即 $f\in A^{B\cup C}$。显然，$H(f)=(g, h)$。可见 H 是从 $A^{B\cup C}$ 到 $A^B\times A^C$ 上的满射。 ∎

【引理 3】 $(A\times B)^C\approx A^C\times B^C$.

证明留给读者。

【引理 4】 $(A^B)^C\approx A^{B\times C}$.

证 如下定义 $H: (A^B)^C\to A^{B\times C}$：对于 $f\in(A^B)^C$（即 $f: C\to A^B$，其中对于 $z\in C$，$f(z)$ 是从 B 到 A 内的映射），令 $H(f)\in A^{B\times C}$ 是这样的映射，它在 (y, z) 的值等于映射 $f(z)$ 在 y 的值：

$$H(f)(y,z)=f(z)(y).$$

H 是单射。事实上，如 $f, f'\in(A^B)^C$ 且 $f\neq f'$，即存在 $z\in C$，使 $f(z)\neq f'(z)$，亦即存在 $y\in B$，使

$$f(z)(y)\neq f'(z)(y).$$

于是

$$H(f)(y, z)=f(z)(y)\neq f'(z)(y)=H(f')(y, z),$$

故 $H(f)\neq H(f')$。其次，H 是从 $(A^B)^C$ 到 $A^{B\times C}$ 上的满射。事实上，对于任何的 $j\in A^{B\times C}$，取 $f\in(A^B)^C$ 如下：对于任何的 $z\in C$ 和 $y\in B$，$f(z)(y)=j(y, z)$。这样，对于任何的 $(y, z)\in B\times C$，就有

$$H(f)(y, z)=f(z)(y)=j(y, z),$$

故 $H(f)=i$. 最后得到，H是从 $(A^B)^C$ 到 $A^{B\times C}$ 上的双射 ▮

下面定义基数的幂. 先对记号问题作些说明. 设 a, b 是基数. 我们将用 a^b 记 a 的 b 次幂. 但应知这不是集合 b 到集合 a 内一切映射的集合. 为了区别，在下面我们用小写字母 a, b, c 或希伯来字母 $\aleph$ 等等记基数，用 a^b, a^c 等等记基数的幂；同时，用大写字母 A, B 等等记一般的集合，仍用 A^B 记从 B 到 A 的一切映射的集合.

【定义】 设 a, b 是基数，且集合 A, B 满足条件:

$$\operatorname{car}(A)=a,\ \operatorname{car}(B)=b,$$

称 $p=\operatorname{car}(A^B)$ 为 a 的 b 次幂，记作

$$p=a^b.$$

由引理 1 可知，定义中的 a^b 不依赖于集合 A, B 的选取.

【注 1】 按定义，我们有

$$(\operatorname{car}(A))^{\operatorname{car}(B)}=\operatorname{car}(A^B).$$

现在看求幂运算与乘法的联系. 对于自然数来说，求幂就是相同乘项的累乘. 例如，$2^3=2\cdot2\cdot2$. 对于一般基数来说，情况是一样的. 设 a, b 都是基数，看乘积 $\prod\limits_{i\in b}a$ $\left(\text{这指的是 } \prod\limits_{i\in b}a_i,\ \text{其中每个 } a_i=a\right)$. 按定义，$\prod\limits_{i\in b}a=\operatorname{car}\left(\bigtimes\limits_{i\in b}a\right)$. 但 $\bigtimes\limits_{i\in b}a=\{(x_i)_{i\in b}\mid x_i\in a\}$ 恰好是集合 b 到集合 a 内一切映射(族) $(x_i)_{i\in b}$ 的集合. 按定义，它的基数就是 a^b. 这就得到:

【注 2】 $\prod\limits_{i\in b}a=a^b$

用通俗的话说，这就是“b 个 a 的连乘积等于 a 的 b 次幂”.

把已证的引理 2，3，4 同定义结合起来，就得到以下的指数法则：

$a^{b+c}=a^b\cdot a^c$.

$(a\cdot b)^c=a^c\cdot b^c$

$(a^b)^c=a^{b\cdot c}$.

此外，由第二章，§ 6，注 1，2，我们有

$$Y^{\varnothing}=\{\varnothing\};\ \text{如}\ X\neq\varnothing,\ \text{则}\ \varnothing^X=\varnothing.$$

把这两个结果与幂的定义结合，就得到

$$a^0=1.$$

$$\text{如}\ a\neq 0,\ \text{则}\ 0^a=0.$$

不难看出，$a^1=a$. 于是由指数法则，$a^{b+1}=a^b\cdot a$. 把这等式与等式 $a^0=1$ 合并考虑，可知当 a，b 是有限基数——自然数时，这里定义的 a^b 与第三章，§ 7 的定义是一致的.

【引理 5】 1) $a\leqslant b\Rightarrow a^c\leqslant b^c$.

2) $a\leqslant b\Rightarrow c^a\leqslant c^b$.

事实上，设 $\operatorname{car}(A)=a$，$\operatorname{car}(B)=b$，$\operatorname{car}(C)=c$，且 $A\prec B$. 不妨假定 $A\subset B$. 容易验证 $A^C\subset B^C$，$C^A\subset C^B$. ▌

【例 1】 在第四章，§ 1，例 5，我们看到，集合 A 的幂集与 A 上一切特征函数的集合等势：

$$\mathscr{P}(A)\approx 2^A.$$

于是，如 $\operatorname{car}(A)=a$，则 $\operatorname{car}(\mathscr{P}(A))=\operatorname{car}(2^A)=2^a$.

当 A 是有限集时，设 $N(A)=n$，则 $N(\mathscr{P}(A))=2^n$（参看习题四，14）.

【例 2】 按 § 9，例 2，我们用 $\mathbf{c}$ 记连续统 $(0,1)$ 的基数. 由第四章，§ 3，$(0,1)\approx 2^{\omega}$，故

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}.$$

【例 3】 由第四章的 Cantor 定理(看第四章，§3，注 4)，我们有 $A \prec 2^A$. 用基数表示，这就是

$$a < 2^a$$

特别有

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

【引理 6】 设 b 是超限基数，则

$$b^b = 2^b.$$

证 既然 b 是超限基数，故 $2 < b$. 由引理 5，$2^b \leqslant b^b$. 另一方面，由例 3，$b < 2^b$，故 $b^b \leqslant (2^b)^b = 2^{b \cdot b}$. 由乘法吸收律，$b \cdot b = b$. 故 $b^b \leqslant 2^b$. 最后得到 $b^b = 2^b$. ∎

【例 4】 有多少从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 内的函数？即 $\operatorname{car}(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{R}}) = ?$

仍用 $\mathfrak{c}$ 记连续统的基数，则 $\operatorname{car}(\boldsymbol{R}) = \mathfrak{c}$. 于是由引理 6，

$$\operatorname{car}(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{R}}) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}} = 2^{2^{\aleph_0}}.$$ ∎

【定理 18】 (降底律)设 b 是超限基数且基数 a 满足

$$2 \leqslant a \leqslant b,$$

则

$$a^b = 2^b.$$

证 因 $2 \leqslant a$ 且 $a \leqslant b$ 且 b 超限，故由引理 5 及引理 6，$2^b \leqslant a^b$ 且 $a^b \leqslant b^b = 2^b$. 于是 $a^b = 2^b$. ∎

例如，$\aleph_0^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$，$\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = 3^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

§12 连续统假设

每个自然数是基数，任何两个相邻的自然数 n 和 n^+ 之

间不存在另外的基数．最小的超限基数是 $\aleph_0$，它是唯一的无穷可数基数． 在 §8，我们用 $\aleph_1$ 记最小的不可数基数．在 $\aleph_0$ 与 $\aleph_1$ 之间不可能再有另外的基数．按以上讨论结果，基数的长河的较前部分应是

$$0, 1, 2, \cdots, \aleph_0, \aleph_1, \cdots$$

这里任何两个相邻基数之间都没有另外的基数．

另一方面，$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$（§11，例3）．可见 $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$． 问题是，连续统的基数 $c = 2^{\aleph_0}$ 是否就是最小的不可数基数 $\aleph_1$？或者说，在 $\aleph_0$ 与 $2^{\aleph_0}$ 之间是否不存在另外的基数？这个问题还可以说成是：有没有不可数的集合，严格受制于连续统？从 Cantor 创立集合论以后，从无一人找到（哪怕非构造性地证明存在）这样的不可数集合．Cantor 猜测，这样的集合不存在，就是说，在基数 $\aleph_0$ 与 $2^{\aleph_0}$ 之间不存在另外的基数．这就是历史上著名的连续统假设．按这一假设，基数的长河的较前部分应是

$$0, 1, 2, \cdots, \aleph_0, 2^{\aleph_0}, \cdots$$

在 Cantor 之后，不少数学家（例如著名的 D. Hilbert）企图证明这一假设，但终归徒然．

连续统假设可以推广为：在超限基数 a 与 2^a 之间不存在另外的基数①．这叫做推广的连续统假设．

连续统假设以至推广的连续统假设能否证明或否定，以及选择公理能否证明或否定（参看第四章，§4），对这两个问题的探讨大大促进了现代公理集合论的发展．在1938，

① 当然，有限基数（自然数）只有0和1具有此性质，其他自然数都不具此性质．

K. Gödel 证明了，如假定（ZF）公理系统（看§4）是相容（无矛盾）的，那么，推广的连续统假设也同（ZF）系统相容．这就是说，在（ZF）系统里，否定不了推广的连续统假设．后来，在1963—1964，P. Cohen 又证明了推广的连续统假设同（ZF）公理系统是独立的．这就是说，在（ZF）系统里，证明不了推广的连续统假设．总之，在（ZF）系统里，对于连续统假设既不能否定，也不能证明．对此问题有兴趣的读者可以阅读例如参考读物[5]或[6]，后者对当代集合论的发展提供了较丰富的材料．

习 题 六

1．对于序数 α,β，试证

$$\alpha<\beta\Longrightarrow\alpha^+\leqslant\beta.$$

2．证明，在序数 α 与其后继者 α^+ 之间不存在另外的序数．

3．设 A 是由序数组成的集合．求证 $\bigcup(A)$（在§3，定理7的推论中已证它是序数）是 A 的上确界．

4．设 A 是由序数组成的非空集．求证 $\bigcap(A)$ 是 A 的最小数．［提示：按§3，定理7，可设 β 是 A 的最小数．证明 β 与 $\bigcap(A)$ 重合．］

5．证明任何序数不能属于自己：$\alpha\notin\alpha$．

6．对于序数 α,β，试证 $\alpha^+=\beta^+\Longrightarrow\alpha=\beta$．

7．对于序数 α,β，试证 $\alpha<\beta\Leftrightarrow\alpha^+<\beta^+$．

8．对于序数 α，证明 $\alpha=\bigcup(\alpha^+)$

9．对于序数 α，证明：$\alpha=0$ 或 α 是极限序数 $\Longleftrightarrow\alpha=\bigcup(\alpha)$．

［提示：关于 $\Longrightarrow$ 部分：对于极限序数 α，设 $x\in\alpha$．证明 $x^+\in\alpha$．但 $x\in x^+$，故 $x\in\bigcup(\alpha)$．于是 $\alpha\subset\bigcup(\alpha)$．另一方面 $\bigcup(\alpha)\subset\alpha$ 是显然的．关于 $\Longleftarrow$ 部分，可利用第8题］．

10．对于序数 α,β，证明 $\beta<\alpha\Longrightarrow\beta\leqslant\bigcup(\alpha)$．

[提示：可分 $\alpha=0$；α 是极限序数；$\alpha\neq 0$ 且非极限序数三种情形.]

11. 设 α,β 是序数. 试证，如 α 相似于 β 的某个子集，则 $\alpha\leqslant\beta$.

[提示：设 $B\subset\beta$，且 f 是从 α 到 B 上的相似映射. 假定 $\beta<\alpha$，即 $\beta\in\alpha$. 按第五章，§4，引理 1，$\beta\leqslant f(\beta)\in\beta$. 这就得到 $\beta<\beta$.]

12. 设给定集组 A. 试用替换公理证明，对于 A 的一切成员 x，$\mathscr{P}(x)$ 组成一个集合，即 $\{\mathscr{P}(x)|x\in A\}$ 是集合.

[提示：在§4，替换公理中，可取公式 $\varphi(x,y)$ 为 $y=\mathscr{P}(x)$. 注：也可取 $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\bigcup(A)))$ 为包容集并利用子集公理. 但对于 $x\in A$，证明 $\mathscr{P}(x)\in\mathscr{P}(\mathscr{P}(\bigcup(A)))$ 是较麻烦的(看习题一，25).]

13. 利用正则公理证明，任何集合 a 不能属于自己：$a\notin a$.

[提示：在§4末尾所列的正则公理中，可取 $A=\{a\}$.]

14. 利用正则公理证明，对于任何的集合 a,b，$a\notin b$ 或 $b\notin a$.

[提示：在正则公理中，可取 $A=\{a,b\}$.]

15. 关于序数的超限归纳原理. 设 $\varphi(x)$ 是公式. 试证，如对于任何序数 α，

$$\forall x\in\alpha\varphi(x)\Longrightarrow\varphi(\alpha),$$

则对于任何序数 α，$\varphi(\alpha)$ 成立.

[提示：由于一切序数不能形成集合，故此处不能引用第五章，§3关于良序集的超限归纳原理. 我们用反证法并引用正则公理. 设存在序数 α，$\varphi(\alpha)$ 不成立. 看集合 $A=\{\beta|\beta$ 是序数且 $\beta\in\alpha^{+}$ 且 $\varphi(\beta)$ 不成立$\}$. $\alpha\in A$，故 $A\neq\varnothing$. 按正则公理，存在序数 $\alpha_0\in A$ 且 $A\cap\alpha_0=\varnothing$. 由此推出 $\forall x\in\alpha_0$，$\varphi(x)$成立，但 $\varphi(\alpha_0)$ 不成立. 这就同关于公式 $\varphi(x)$ 的归纳假设矛盾.]

16. 设 B 是良序集，且 $A\subset B$. 试证 $\mathrm{ord}(A)\leqslant\mathrm{ord}(B)$. 举例说明由 $A\subsetneqq B$ 推不出 $\mathrm{ord}(A)<\mathrm{ord}(B)$.

[提示：可利用第11题.]

17. 证明以下关于序数加法的算律：

1) $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$.

2) $\alpha+1=\alpha^{+}$. (举出 $1+\alpha\neq\alpha^{+}$ 的例子.)

3) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$. (结合律)

18. 关于序数,证明:

$$\alpha<\beta\Leftrightarrow\exists\delta\neq0(\beta=\alpha+\delta).$$

举例说明由 $\alpha<\beta$ 不能一般推出存在 $\delta\neq0$, 使 $\beta=\delta+\alpha$.

[提示: 关于$\Longrightarrow$部分: 看差集 $\beta-\alpha$, 并取 $\delta=\mathrm{ord}(\beta-\alpha)$. 关于反例,可取 $\alpha=\omega$, $\beta=\omega^{+}$.]

19. 关于序数的加法,证明左消去律:

$$\alpha+\beta=\alpha+\gamma\Longrightarrow\beta=\gamma.$$

举例说明右消去律不一般成立.

20. 关于序数,在§7, 例2中已证:

$$\beta<\gamma\Longrightarrow\alpha+\beta<\alpha+\gamma.$$

举例说明由 $\beta<\gamma$ 不能一般推出 $\beta+\alpha<\gamma+\alpha$. 不过,

$$\beta<\gamma\Longrightarrow\beta+\alpha\leqslant\gamma+\alpha.$$

试证明之.[提示: 设法引用第16题.]

21. 对于任何序数 β,γ 和自然数 n, 试证

$$\beta<\gamma\Longrightarrow\beta+n<\gamma+n.$$

22. 证明以下关于序数乘法的算律:

1) $\alpha\cdot0=0\cdot\alpha=0$.

2) $\alpha\cdot1=1\cdot\alpha=\alpha$.

3) $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$. (结合律)

4) $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$. (左分配律)

举例说明右分配律不一般成立.

23. 验证当 $\alpha=m$, $\beta=n$ 是自然数时, §7 定义的乘法满足第三章, §7 关于乘法的递推定义.

24. 关于序数的乘法,证明左消去律:

$$\alpha\neq0\wedge\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma\Longrightarrow\beta=\gamma.$$

举例说明右消去律不一般成立。

25. 关于序数，在§7，例3中已证：

$$\alpha\neq 0\wedge\beta<\gamma\Longrightarrow\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma.$$

举例说明由 $\alpha\neq 0\wedge\beta<\gamma$ 不能一般推出 $\beta\cdot\alpha<\gamma\cdot\alpha$. 不过，

$$\beta<\gamma\Longrightarrow\beta\cdot\alpha\leqslant\gamma\cdot\alpha.$$

试证明之。

26. 如序数 $\alpha\neq 0$ 且不是极限序数，则对于任何序数 β,γ,

$$\beta<\gamma\Longrightarrow\beta\cdot\alpha<\gamma\cdot\alpha.$$

[提示：可设 $\delta^{+}=\alpha$. 利用第25题，§7的例2和第20题，可证 $\beta\cdot\delta+\beta<\gamma\cdot\delta+\gamma$.]

27. 如序数 $\alpha\neq 0$ 且不是极限序数，证明：

$$\beta\cdot\alpha=\gamma\cdot\alpha\Longrightarrow\beta=\gamma.$$

28. 族 $(\alpha_i)_{i\in u}$ 叫做序数列，当且仅当标集 u 是序数，且每项 α_i 是序数。

序数 λ 叫做序数列 $(\alpha_i)_{i\in u}$ 的极限，当且仅当对于任何使 $\beta<\lambda<\gamma$ 的序数 β,γ，存在序数 $\nu\in u$，使当 $i\geqslant\nu$ 时，

$$\beta<\alpha_i<\gamma.$$

序数列 $(\alpha_i)_{i\in u}$ 说是递增的，当且仅当对于任何的 $i,j\in u$，当 $i<j$ 时，$\alpha_i\leqslant\alpha_j$.

试证：如序数列 $(\alpha_i)_{i\in u}$ 递增，则它有极限。

[提示：参看第3题.]

29. 证明关于基数加法的算律：

1) $a+0=a$.

2) $a+b=b+a$.（交换律）

3) $(a+b)+c=a+(b+c)$.（结合律）

30. 证明关于基数乘法的算律：

1) $a\cdot 0=0$.

2) $a\cdot 1=a$.

3) $a\cdot b=b\cdot a$.（交换律）

4) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.（结合律）

5) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.（分配律）

31. 对于基数，证明§10 引理 5：

$$a\leqslant b\Longrightarrow a\cdot c\leqslant b\cdot c.$$

32. 仿照§10，引理 3 的证法，证明引理 6：对于超限基数 a，$a\cdot a=a$.

33. 证明定理 17：设 a 是超限基数，且 $1\leqslant b\leqslant a$，则 $a\cdot b=a$.

34. 证明每个超限基数都是"质数"，即不能表成两个较它小的基数之积.

35. 如不假定族 $(A_i)_{i\in I}$ 的项两两不相交，又假定对于每个 $i\in I$，$\operatorname{car}(A_i)=a_i$. 试证

$$\operatorname{car}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\leqslant\sum_{i\in I}a_i.$$

36. 设给定基数族 $(a_i)_{i\in I}$ 及 $(b_i)_{i\in I}$. 证明：如对于每个 $i\in I$，$a_i\leqslant b_i$，则 $\sum\limits_{i\in I}a_i\leqslant\sum\limits_{i\in I}b_i$.

37. 证明，对于超限基数 a 及非零的自然数 n，$a^n=a$.

38. 利用第 37 题重作习题四，25.

39. 设基数 β 是一个幂：$\beta=a^b$，其中 b 是超限基数. 试证，如 $0<c\leqslant b$，则 $\beta^c=\beta$.

40. 1) 利用基数的算术重证习题四，31：

$$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\approx\boldsymbol{R}.$$

2) 证明 n 个 $\boldsymbol{R}$ 的笛卡尔积与 $\boldsymbol{R}$ 等势：

$$\mathop{\times}_{i\in n}\boldsymbol{R}\approx\boldsymbol{R}\ (\text{其中 } n\in\omega \text{ 且 } n\neq 0).$$

3) 证明 $\aleph_0$ 个 $\boldsymbol{R}$ 的笛卡尔积与 $\boldsymbol{R}$ 等势：

$$\mathop{\times}_{i\in\omega}\boldsymbol{R}\approx\boldsymbol{R}.$$

4) c(连续统的基数,即$\boldsymbol{R}$的基数)个$\boldsymbol{R}$的笛卡尔积 $\bigtimes_{i\in c}\boldsymbol{R}$ 还同$\boldsymbol{R}$等势吗?

41. 已证(§11, 例4)从$\boldsymbol{R}$到$\boldsymbol{R}$内的一切函数的集合具有基数2^c. 试证,从$\boldsymbol{R}$到$\boldsymbol{R}$内的一切连续函数的集合具有基数 $c=2^{\aleph_0}$.

[提示: 用C记从$\boldsymbol{R}$到$\boldsymbol{R}$内的一切连续函数的集合. 比较一切常数函数的集合,可以推断 $\operatorname{car}(C)\geqslant 2^{\aleph_0}$. 另一方面,看 $F:C\longrightarrow\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{Q}}$, 其中 $F(f)=f\restriction\boldsymbol{Q}$. 如 $f\neq g$, 则由连续性,存在开区间, 在其中 $f(x)\neq g(x)$. 此区间必含有理数,故 $f\restriction\boldsymbol{Q}\neq g\restriction\boldsymbol{Q}$. 可见$F$是单射. 由此不难推出 $\operatorname{car}(C)\leqslant 2^{\aleph_0}$.]

42. (König 定理)给定基数族 $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$. 设对于每个 $i\in I$, $a_i<b_i$, 则

$$\sum_{i\in I}a_i<\prod_{i\in I}b_i.$$

(参看参考读物 [4], pp. 190—191)

参 考 读 物

[1] A. A. Fraenkel: Abstract Set Theory. (1953)

[2] P. R. Halmos: Naive Set Theory (1974)

[3] H. B. Enderton: Elements of Set Theory. (1977)

[4] K. Hrbacek &. T. Jech: Introduction to Set Theory. (1984)

[5] G. Takeuti &. W. M. Zaring: Introduction to Axiomatic Set Theory. (1981)

[6] T. Jech: Set Theory. (1978)

[7] 王宪钧: 数理逻辑引论. (北京大学出版社, 1982)

索 引

（词后的数字指页数）

六　画

七　画

八 画

九 画

十 画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 四 画

外 文 人 名